

密级：公开

编号：22111211

中山大學

博士学位论文

多波段视角下恒星级双黑洞的空间引力波数据处理

Space-based Gravitational Wave Data Analysis of
Stellar-mass Binary Black Holes: A Multiband View

学位申请人：王晗

导师姓名及职称：胡一鸣 教授

专业名称：天文学

2025 年 5 月 23 日

多波段视角下恒星级双黑洞的空间引力波数据处理

Space-based Gravitational Wave Data Analysis of Stellar-mass Binary Black Holes:
A Multiband View

学 位 申 请 人 : 王晗
专 业 名 称 : 天文学
导师姓名及职称 : 胡一鸣 教授

答辩委员会主席 (签名):
答辩委员会委员 (签名):

2025 年 5 月 15 日

公开版本说明 / Note on This Public Version

感谢您查阅我的博士学位论文！

本文件为本人于2025年提交的中山大学理学博士学位论文的公开版本。除本说明外，论文主体内容与正式提交版本一致，签名信息已移除。

本论文反映的是论文提交时相关研究工作的状态。此后，其中部分工作在后续研究、论文发表及软件开发过程中得到了进一步更新和完善。例如，论文中涉及 GWSpace 的内容对应当时的软件版本，该项目此后仍在持续开发和迭代。

因此，如论文中的结果与本人后续发表的论文、公开软件或相关项目文档存在差异，请以后续成果为准。相关更新可参考本人个人主页：humphreywang.github.io

本公开版本由作者提供，欢迎用于学术交流与研究参考。学术引用请注明出处。除法律另有规定外，未经作者许可，请勿转载、改编或用于商业用途。

Thank you for taking the time to read my doctoral dissertation!

This file is a public version of my doctoral dissertation submitted to Sun Yat-sen University in 2025. Except for this note, the main text is identical to the version formally submitted, with signature information removed.

The dissertation reflects the status of the research at the time of submission. Some of the work presented here has since been further updated and refined through subsequent research, publications, and software development. For example, the discussion of GWSpace corresponds to the version available at that time, while the project has continued to be actively developed and updated.

Therefore, where results presented in this dissertation differ from my subsequent publications, publicly released software, or related project documentation, please refer to the later versions. Relevant updates can be found on my personal website: humphreywang.github.io

This public version is provided by the author and is intended for academic communication and research reference. Please provide appropriate attribution when citing this dissertation. Except as otherwise permitted by law, please do not redistribute, adapt, or use this work for commercial purposes without the author's permission.

论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文使用授权声明

本人完全了解中山大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文并向国家主管部门或其指定机构送交论文的电子版和纸质版；有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆、院系资料室被查阅；有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索；可以采用复印、缩印或其他方法保存学位论文；可以为建立了馆际合作关系的兄弟高校用户提供文献传递服务和交换服务。

保密论文保密期满后，适用本声明。

学位论文作者签名：

导师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

多波段视角下恒星级双黑洞的空间引力波数据处理

专 业：天文学

博 士 生：王晗

指导教师：胡一鸣 教授

摘 要

随着 2015 年地面引力波探测器首次探测到来自恒星级双黑洞并合的引力波信号，引力波天文学的大门被打开。尽管已有的观测数据扩展了人们对双黑洞质量、自旋等物理特征的认识，但这些恒星级双黑洞的形成机制尚未明确。在未来，空间引力波探测器的运行将打开毫赫兹频率引力波的探测窗口，其对多种物理参数的高精度测量（特别是轨道偏心率），将为恒星级双黑洞不同形成机制的区分提供重要依据。然而，传统方法直接在空间引力波数据中处理恒星级双黑洞信号所需的计算资源远超可行范围。恒星级双黑洞在地面和空间频段均辐射引力波，多波段联合探测由此成为突破瓶颈的可行方案。在地面探测到恒星级双黑洞事件后，可对空间探测器的数据档案开展回溯式搜索，即“档案搜索”。通过地面观测提供的高精度参数估计信息，空间数据的参数空间被显著压缩，从而大幅降低计算成本。此前的研究多聚焦于理论方案探讨，尚未形成完整的端到端的数据处理体系。

因此，本课题旨在针对地面引力波探测事件，搭建首个涵盖“数据模拟-信号探测-信号测量”全过程的空间引力波档案搜索流水线。首先，本课题开发了面向空间引力波数据模拟的软件 `GWSpace`，该软件兼容多种空间探测器，集成了天琴等探测器的轨道模型、噪声谱和天线响应函数，并支持包括恒星级双黑洞在内的多种引力波源。特别地，本课题还针对包含偏心率参数的双黑洞波形修正了其天线响应函数的计算。随后，本课题使用含偏心率的引力波波形，构建了适用于空间探测器的匹配滤波探测的波形模板库。研究发现引入偏心率后所需模板数量较圆轨道情况高出五个数量级以上，而在初始偏心率 $e_i \gtrsim 5 \times 10^{-4}$ 的情况下，忽略偏心率会导致匹

配滤波产生显著系统误差。这一结论不仅验证了空间探测器对偏心率参数的约束能力，为区分恒星级双黑洞形成机制提供了关键判据，而且进一步强调了偏心率效应在引力波研究中的关键作用。最后，本课题基于贝叶斯推断方法，实现了档案搜索条件下对恒星级双黑洞信号的参数估计。利用外差似然方法，在不影响结果精度的前提下显著加速了波形计算，使得参数估计在可接受的计算时间内完成。计算结果进一步验证了空间探测器对质量、偏心率等参数测量方面的独特优势，体现了其在揭示恒星级双黑洞形成机制中的重要科学意义。上述系列工作的开展不仅为恒星级双黑洞的多波段引力波数据分析奠定了坚实基础，也为未来借助空间引力波探测项目分辨其形成机制提供了宝贵的技术储备。

关键词：恒星级双黑洞，档案搜索，引力波探测，贝叶斯推断，偏心率

Space-based Gravitational Wave Data Analysis of Stellar-mass Binary Black Holes: A Multiband View

Major: Astronomy

Name: WANG, Han

Supervisor: Professor HU, Yi-Ming

Abstract

In 2015, ground-based gravitational wave (GW) detectors recorded the first-ever GW signal from a stellar-mass binary black hole (sMBBH) merger, thereby opening the door to GW astronomy. Although existing observations have broadened our understanding of physical properties such as the masses and spins of sMBBHs, their formation mechanisms remain unclear. In the future, space-based detectors will open a detection window in the millihertz frequency band. Their capability to measure various physical parameters with high precision (especially the orbital eccentricity) will provide crucial evidence for distinguishing among different formation mechanisms of sMBBHs. However, applying traditional methods to analyze sMBBH signals in space-based data is computationally prohibitive. Since these systems emit GWs across both ground- and space-based frequency bands, a multiband joint-detection strategy offers a promising approach to overcome this computational bottleneck. Specifically, for GW events detected by ground-based detectors, one can perform a retrospective search in the space-based data - so-called “archival search”. By leveraging the high-precision parameter estimates from ground-based observations, the parameter space in the space-based data is significantly reduced, thereby greatly lowering the computational cost. Previous studies have mainly focused on theoretical schemes, and a complete end-to-end data analysis pipeline has yet to be established.

Therefore, this thesis aims to implement the first comprehensive space-based GW archival search pipeline that covers the entire process - from data simulation to detection to parameter estimation - for ground-detected GW events. First, we developed **GWSpace**, a package for space-based GW data simulation. This software is compatible with multiple space-based detectors, integrates orbital models, noise, and antenna response functions for detectors such as TianQin, and supports various GW sources including sMBBHs. In particular, the computation of the antenna response has been revised to accommodate binary black hole waveforms that include the eccentricity. Next, using GW waveforms that account for eccentricity, we constructed a template bank for matched-filtering detection tailored to space-based detectors. Our study found that incorporating eccentricity increases the required number of templates by more than five orders of magnitude compared to the circular orbit case. Moreover, for initial eccentricity $e_i \gtrsim 5 \times 10^{-4}$, neglecting eccentricity leads to significant systematic biases during matched filtering. This conclusion not only validates the capability of space-based detectors to constrain the eccentricity - providing a key criterion for distinguishing the formation mechanisms of sMBBHs - but also highlights the crucial role of eccentricity effects in GW research. Finally, based on Bayesian inference, we implemented parameter estimation for sMBBH signals detected via archival search. Using the heterodyning likelihood approach, we significantly sped up waveform computation while preserving accuracy, enabling parameter estimation within acceptable time. The results further demonstrate the unique advantages of space-based detectors in measuring parameters such as masses and eccentricity, underscoring their significant role in unveiling the formation mechanisms of sMBBHs. These studies have not only established a robust foundation for multiband GW data analysis of sMBBHs, but also provided valuable technical groundwork for future efforts to distinguish their formation mechanisms through space-based GW missions.

Keywords: Stellar-Mass Binary Black Hole, Archival Search, Gravitational Wave Detection, Bayesian Inference, Eccentricity

摘 要	I
ABSTRACT	III
第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 恒星级双黑洞的研究现状	5
1.2.1 地面引力波探测	5
1.2.2 空间引力波探测	7
1.2.3 多波段联合探测	9
1.3 研究目标	10
1.4 论文结构与章节安排	12
第 2 章 恒星级双黑洞的引力波	13
2.1 双星系统的引力波	13
2.2 恒星级双黑洞的偏心率	17
2.3 引力波信号的建模	20
2.3.1 引力波波形	20
2.3.2 引力波信号的天线响应	21
2.4 本章小结	31
第 3 章 引力波数据处理	33
3.1 引力波探测器的噪声	33
3.2 引力波信号的探测	36
3.2.1 匹配滤波	36
3.2.2 波形模板库	38
3.3 引力波信号的测量	43
3.3.1 Fisher 信息矩阵	44
3.3.2 贝叶斯推断	45
3.4 本章小结	50
第 4 章 空间引力波探测器数据模拟	51
4.1 引力波信号的天线响应：含偏心率情形	52
4.2 GWSpace：多任务空间引力波数据模拟软件	58
4.3 恒星级双黑洞信噪比与空间方位的关系	60
4.4 本章小结	65

第 5 章	恒星级双黑洞的档案搜索	66
5.1	地面探测器网络的探测能力	66
5.2	波形模板库的生成	69
5.2.1	模板库大小及特征	70
5.2.2	偏心率参数必要性检验	74
5.2.3	模板库的有效性检验	75
5.3	信噪比阈值与探测率估计	76
5.4	本章小结	79
第 6 章	基于档案搜索的信号测量	81
6.1	地面探测器网络的参数估计	81
6.2	参数估计与方法测试	84
6.3	参数估计结果	88
6.3.1	核密度估计与先验范围	88
6.3.2	参数估计的加速	90
6.4	本章小结	96
总结与展望		97
参考文献		99
攻读博士学位期间发表学术论文情况		121
致 谢		123

Contents

Abstract (In Chinese)	I
Abstract (In English)	III
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Research Background	1
1.2 Current Research Status on Stellar-Mass Binary Black Holes	5
1.2.1 Ground-Based Gravitational Wave Detection	5
1.2.2 Space-Based Gravitational Wave Detection	7
1.2.3 Multi-Band Joint Detection	9
1.3 Research Objectives	10
1.4 Thesis Structure and Organization	12
Chapter 2 Gravitational Waves from Stellar-Mass Binary Black Holes	13
2.1 Gravitational Waves from Binary Systems	13
2.2 Eccentricity of Stellar-Mass Binary Black Holes	17
2.3 Modeling of Gravitational Wave Signals	20
2.3.1 Gravitational Waveforms	20
2.3.2 Antenna Response of Gravitational Wave Signals	21
2.4 Brief Summary	31
Chapter 3 Gravitational Wave Data Analysis	33
3.1 Noise in Gravitational Wave Detectors	33
3.2 Detection of Gravitational Wave Signals	36
3.2.1 Matched Filtering	36
3.2.2 Waveform Template Bank	38
3.3 Measurement of Gravitational Wave Signals	43
3.3.1 Fisher Information Matrix	44
3.3.2 Bayesian Inference	45
3.4 Brief Summary	50
Chapter 4 Data Simulation for Space-Based Gravitational Wave Detectors	51
4.1 Antenna Response of Gravitational Wave Signals: Including Eccen- tricity Effects	52

4.2	GWSpace: Multi-mission Science Data Simulator for Space-based Gravitational Wave Detection	58
4.3	Relationship between SNR of Stellar-Mass Binary Black Holes and Spatial Orientation	60
4.4	Brief Summary	65
Chapter 5	Archival Search for Stellar-Mass Binary Black Holes	66
5.1	Detection Capability of Ground-Based Detector Networks	66
5.2	Generation of the Waveform Template Bank	69
5.2.1	Size and Characteristics of the Template Bank	70
5.2.2	Necessity of the Eccentricity Parameter	74
5.2.3	Validity of the Template Bank	75
5.3	Estimation of SNR Threshold and Detection Rate	76
5.4	Brief Summary	79
Chapter 6	Signal Measurement Based on Archival Search	81
6.1	Parameter Estimation for Ground-Based Detector Networks	81
6.2	Parameter Estimation and Method Evaluation	84
6.3	Results of Parameter Estimation	88
6.3.1	Kernel Density Estimation and Prior Range	88
6.3.2	Acceleration of Parameter Estimation	90
6.4	Brief Summary	96
Conclusions		97
References		99
Publications during Doctoral Studies		121
Acknowledgements		123

图目录

1-1	不同引力波频段对应的引力波波源及引力波探测手段简图	2
1-2	部分地面及空间引力波探测器的特征应变曲线	3
1-3	空间引力波探测器轨道位置示意图	4
1-4	档案搜索数据处理流水线示意图	11
2-1	不同模型下恒星级双黑洞轨道偏心率的分布情况	19
2-2	空间探测器激光链路示意简图	24
2-3	日心黄道坐标系的天琴轨道	28
2-4	探测器系与地心黄道坐标系下的天琴轨道	30
3-1	下一代探测器 ET 和 CE 的灵敏度曲线	33
3-2	天琴和 LISA 的灵敏度曲线	34
3-3	匹配滤波方法示例: 信噪比	37
3-4	匹配滤波方法示例: 波形匹配	37
3-5	模板库需要合适的模板数量	38
3-6	二维欧式空间的覆盖问题	39
3-7	sbank 程序包结构示意图	40
3-8	模板库生成过程: 开始注入	41
3-9	模板库生成过程: 距离判定	41
3-10	模板库生成过程: 邻域参数	42
3-11	简单二维欧式空间示例下的模板库	43
3-12	示例似然函数等高线及其对应的先验质量	49
4-1	带偏心率波形的谐频效应示例	52
4-2	EccentricFD 波形示例	54
4-3	EccentricFD 波形示例 ($e_i = 0.4$): 谐频振幅和相位	54
4-4	空间探测器情况下谐频截断的示例波形 ($e_i = 0.4$)	54
4-5	不同谐频的相位计算得出的不同时频关系	55
4-6	示例事件的原始波形以及在天琴和 LISA 中的 TDI 响应波形对比	56
4-7	示例事件的原始波形以及天琴的 TDI 响应波形对比	57
4-8	GWSpace 程序包结构示意图	58
4-9	类 GW150914 源在天琴中信噪比随空间方位的分布	61
4-10	类 GW150914 源在 LISA 中信噪比随空间方位的分布	61

4-11 类 GW150914 源在天琴与 LISA 中信噪比差值随空间方位的分布 . . .	62
4-12 类 GW190521 源: 天琴	63
4-13 类 GW190521 源: LISA	63
4-14 类 GW190521 源: 天琴与 LISA 的差值	64
5-1 增改后的 <code>sbank</code> 程序包结构示意图	70
5-2 示例模板库的啁啾质量分布情况	72
5-3 示例模板库的偏心率分布情况	72
5-4 不同模型下轨道偏心率的分布情况 (含空间探测器探测能力)	73
5-5 含偏心率的波形与无偏心率模板库的匹配因子分布情况	74
5-6 模板库的有效性与冗余度检验	75
5-7 示例模拟事件的匹配滤波搜索结果	76
5-8 示例事件条件下信噪比与 p 值的对应关系	78
5-9 信噪比阈值与模板数和 FAP 的相关关系	79
6-1 下一代地面探测器联合探测示例源的后验概率分布情况	82
6-2 通过 <code>eccfd_plugin</code> 实现 PyCBC 对空间探测器参数估计的支持	84
6-3 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果: 零噪声假设、外差似然函数	84
6-4 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果: 零噪声假设、外差似然函数	85
6-5 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果: 零噪声假设、Gaussian 似然函数	87
6-6 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果: 零噪声假设、Gaussian 似然函数	87
6-7 通过 KDE 方法实现概率密度函数的构建	88
6-8 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果: Gaussian 似然函数、KDE	89
6-9 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果: Gaussian 似然函数、KDE	90
6-10 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果: 外差似然函数、KDE	91
6-11 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果: 外差似然函数、KDE	91
6-12 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时两种方法的似然函数结果	92
6-13 不同偏心率情况下似然函数的进一步对比	93
6-14 天琴探测器情况下 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果	94
6-15 天琴探测器情况下 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果	94
6-16 联合探测时 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的估计结果	95
6-17 联合探测时 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的估计结果	95

表目录

4-1	GW150914 和 GW190521 的源参数信息	60
5-1	不同探测器（网络）对类 GW150914 源的参数精度估计	67
5-2	不同探测器（网络）对类 GW190521 源的参数精度估计	68
5-3	不同参数空间的模板库大小汇总	71
5-4	天琴探测器情况下模板库大小的理论预估	71
6-1	注入源信息和先验范围的选取	83

主要符号对照表

$M_{\odot}$	太阳质量
AU	天文单位 (astronomical unit)
m_1	主黑洞质量
m_2	次黑洞质量
χ_1	主黑洞自旋
χ_2	次黑洞自旋
D_L	光度距离
$\mathcal{M}$	啁啾质量
q	质量比
η	对称质量比
e_i	初始偏心率
α	赤经 (Right ascension, RA)
δ	赤纬 (Declination, DEC)
λ	黄经
β	黄纬
ψ	极化角
ι	轨道倾角
t_c	并合时间
ϕ_c	并合相位
SNR	信噪比 (signal-to-noise ratio)
TDI	时间延迟干涉 (time delay interferometry)
PSD	功率谱密度 (power spectral density)
FF	匹配因子 (fitting factor)
FIM	Fisher 信息矩阵
TianQin, TQ	天琴
LISA	Laser Interferometry Space Antenna
Taiji	太极
CE	Cosmic Explorer
ET	Einstein Telescope

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

在恒星演化末期，核燃料耗尽时，恒星会通过剧烈演化形成三类致密天体——白矮星、中子星和黑洞。而恒星级黑洞，一般指的是质量 $\lesssim 100M_{\odot}$ 的黑洞，是大质量恒星引力坍缩的产物。恒星级双黑洞系统即由两个恒星级黑洞组成的系统。这样的系统的形成机制大致可以分为共同演化和动力学俘获两种方式：

1) 共同演化，指该双黑洞系统由孤立的双恒星系统演化而来。这样的前身星系统将经历吸积过程与物质交换，以及公共包层阶段，最终形成双黑洞系统。因此这样的双黑洞预期会有相同的自旋方向，且与轨道角动量的方向一致，另外由于前身星系统是密近双星，双黑洞系统的轨道预计是近圆的^[1]。

2) 动力学俘获，指恒星各自演化形成黑洞，在特定的天体环境下，两个黑洞靠近并被引力束缚，进而形成双黑洞系统。这样的过程往往需要致密的天体环境，如球状星团^[2]，这样的星团非常年老，因而含有大量的恒星与恒星级黑洞，引力束缚强。显然，这样的系统的自旋方向并不会有限制，但预期将有很显著的轨道偏心率。

特别地，双黑洞系统还有可能和其他周围的黑洞形成三体系统，或者位于活动星系核内，这些复杂的天体环境都会提高系统带有高轨道偏心率的可能性^[3, 4]。

恒星级黑洞除了可以通过恒星演化形成，还可以是原初黑洞。这种黑洞一般被认为诞生于早期宇宙中，即宇宙大爆炸不久后的极端环境中，局部密度涨落直接导致了引力坍缩进而形成黑洞。恒星起源的黑洞一般认为有质量下限，对应中子星的临界质量 ($\sim 3M_{\odot}$)，而原初黑洞根据模型的不同，质量可以分布得非常广泛 ($10^{-18} - 10^6 M_{\odot}$)，因此原初黑洞可以用来解释更低质量黑洞的来源^[5, 6]。

由此可以看出，想要分辨出一个恒星级双黑洞系统是通过哪种方式形成的，需要对双黑洞系统的轨道偏心率等物理参数有高精度的测量，引力波探测就是一种重要手段。在双黑洞系统演化过程中，双星相互绕转通过引力波辐射持续耗散能量，轨道持续收缩。若考虑轨道偏心率的存在，则随着能量的不断流失，偏心率会急剧降低，这种现象被称为圆化效应 (circularization)。双黑洞的演化过程可划分为三个阶段：旋近 (inspiral) 阶段的轨道衰减、并合 (merger) 时刻的剧烈碰撞以及铃宕 (ringdown) 阶段新生黑洞的振动并趋于稳定。2015 年地面引力波探测器 LIGO 首次捕获的引力波信号，正是源自约 36 与 29 倍太阳质量的两个黑洞并合^[7]。

引力波是 Albert Einstein 在 1915 年提出了广义相对论后的次年预言的^[8]，在引力波被直接探测之前，引力波存在的间接证据来自于双脉冲星 PSR1913+16，该系

统由 R.A.Hulse 和 J.H.Taylor 在 1974 年开展的巡天工作中被发现^[9], 随后由 Taylor 和 Weisberg 测定了系统的周期衰减曲线, 结果与引力波理论预期相吻合^[10, 11]。而早在上世纪六十年代 Joseph Weber 就开始设计建造引力波探测器, Weber 建造的是一种共振型探测器, 其装置由多个长 2m, 直径 1m 的圆柱体组成, 这些巨大的铝圆柱体以 1.6kHz 的共振频率振动, 可以被引力波所激发。随后 Weber 在 1969 年宣称发现了引力波信号^[12], 但一直以来其他的探测器也没能证实他的结果。尽管如此, Weber 的努力仍然促进了大量的引力波探测器的方案提出、设计和制造, 其中激光干涉型引力波探测器最后成为了引力波探测器的主流设计。

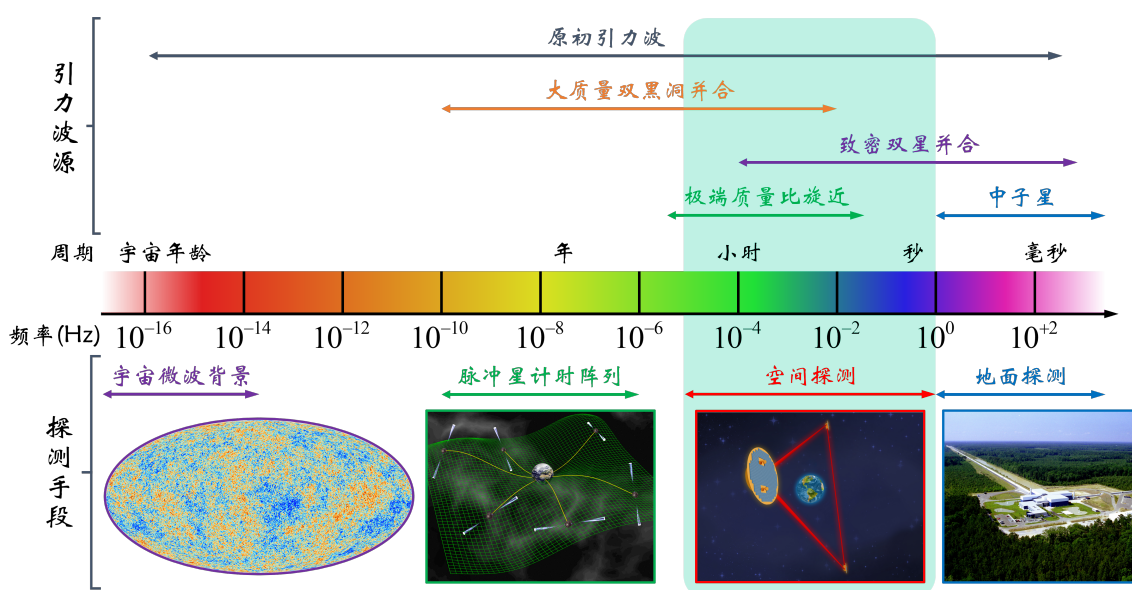


图 1-1 不同引力波频段对应的引力波波源及引力波探测手段简图, 并给出不同频率对应的周期尺度。恒星级双黑洞的旋近与并合分别可以落入空间与地面引力波探测器的灵敏频段。

不同的引力波源会产生不同频率范围的引力波, 相应地需要不同的探测手段 (如图1-1¹)。宇宙微波背景偏振的测量有助于追溯宇宙暴涨时期的原初引力波, 而脉冲星计时阵列通过监测毫秒脉冲星到达时间的周期性扰动来捕捉引力波信号。近期多个脉冲星计时阵项目已探测到纳赫兹引力波信号存在的证据, 这种信号被认为源自超大质量双黑洞系统 (质量 $\gtrsim 10^5 M_{\odot}$) 的随机背景^[13-16]。而对于本课题讨论的恒星级双黑洞——这种多波段引力波源在并合和铃宕阶段产生的高频信号 ($1 - 10^3 \text{ Hz}$) 处于地面探测器的灵敏频段, 而其旋近阶段的中低频信号 ($10^{-3} - 1 \text{ Hz}$) 则适合由空间探测器捕捉。基于此, 我们接下来将具体介绍这两种探测器:

¹基于公共领域图像 The Gravitational Wave Spectrum: Sources and Detectors 重新绘制。原始图像来源: <http://science.gsfc.nasa.gov/663/research/index.html>

地面引力波探测器 LIGO 由两台臂长 4km 的 L 型迈克尔逊干涉仪型引力波探测器组成^[17]，分别位于美国的路易斯安那州和华盛顿州。2015 年 LIGO 完成了一次主要的设备升级（Advanced LIGO）后不久^[18]，便于 9 月 14 日首次观测到引力波，该结果于 2016 年 2 月正式宣布，该事件被命名为 GW150914^[7]。除了 LIGO，目前正在运行的地面探测器还有 Virgo^[19, 20]，KAGRA^[21, 22]，GEO600^[23, 24] 等，其原理基本相同，只是臂长稍短 (3km, 3km, 600m)。

与此同时，下一代的地面引力波探测器也逐一提上日程，主要有 Einstein Telescope (ET)^[25] 和 Cosmic Explorer (CE)^[26]，二者均预期在 2030 年前后投入使用。ET 被计划建设成臂长 10km 的等边三角形干涉仪，而 CE 被计划建设成臂长 40km 的 L 型干涉仪。一般称它们为第三代地面引力波探测器，这是因为考虑到热噪声和引力梯度噪声对探测器的影响，第三代地面探测器计划建设在地下并在低温环境下运行，相比现如今的探测器将会迎来巨大的灵敏度的提升（如图1-2）。

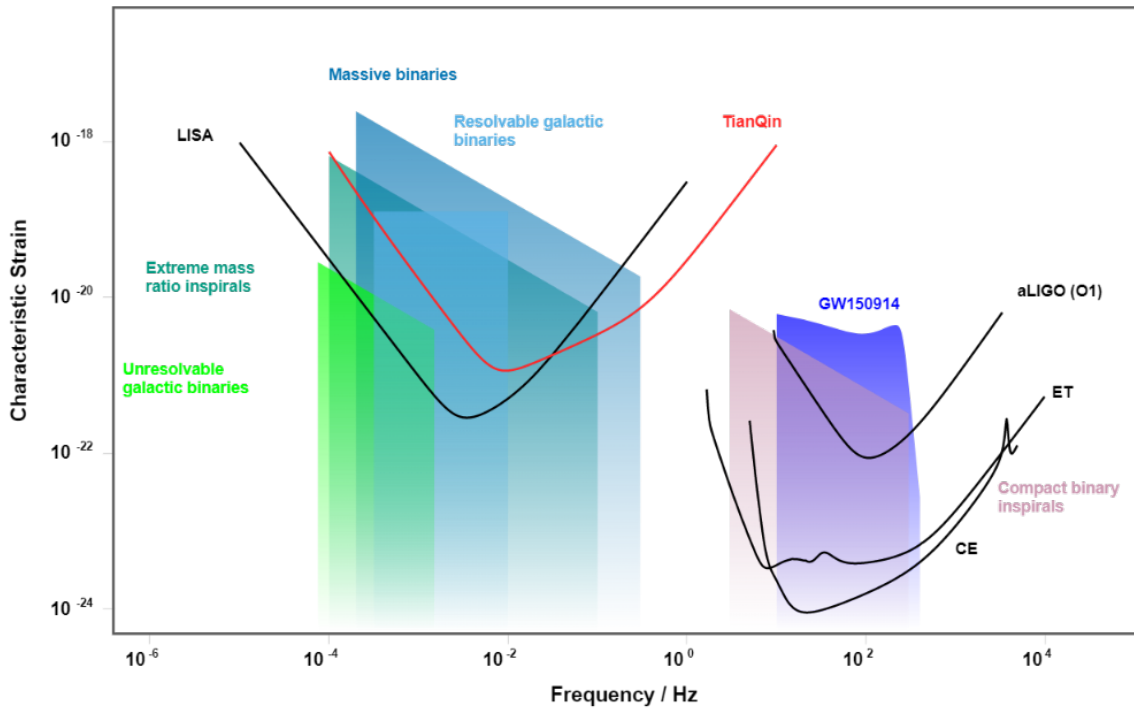


图 1-2 部分地面及空间引力波探测器的特征应变 (characteristic strain) 曲线^[27]，特征应变是衡量探测器在该频率下灵敏度的常用指标，数值越低代表探测器在该频率的灵敏度越好。不同色块代表不同频段下一些典型的引力波源。

空间引力波探测器 地面引力波探测器基线长度有限，尽管设备的升级可以提升灵敏度，但其灵敏频段依旧对应的是高频引力波。因此，探测 1Hz 以下的引力波信号，需要将目光转向空间探测。

天琴是由中山大学罗俊院士提出的一种空间引力波探测器^[28]。该探测计划预期将在 10 万公里高的地心轨道上放置三颗无拖曳卫星，组成等边三角形构型的一组空间激光干涉仪，其预期的灵敏频段约为 $10^{-4} - 1\text{Hz}$ （如图1-2）。天琴绕地轨道平面是固定的，指向双白矮星系统 RX J0806.3+1527，其特殊性在于该系统是目前已知的周期最短的双白矮星系统，此外，该系统的黄纬仅为 -4.7° ，因此天琴的轨道平面与黄道面几乎垂直。这导致轨道平面指向与太阳光方向夹角较小时，探测器热负荷加重，为避免太阳光过于影响探测器的性能，天琴预计采用三个月工作，三个月待机的工作模式。天琴的计划运行时间是五年，因此实际有效观测时长为 2.5 年。上述构型也被称为 TianQin I，这是由于为了避免间断观测带来的损失，天琴还将计划第二组星座构型，即 TianQin II，该构型的轨道平面与 TianQin I 轨道平面垂直，以便双星座交替观测，实现全年不间断观测的效果。

Laser Interferometry Space Antenna (LISA) 也是等边三角形构型的空间激光干涉型引力波探测器^[29]，也是最早被提出的空间引力波探测器。与天琴不同的是，LISA 的三角形编队边长为 250 万公里，位于地球后方约 20° 的拉格朗日点附近绕日飞行。此外，中国科学院提出的太极计划^[30]也采用与 LISA 类似的轨道（见图1-3），但计划臂长为 300 万公里。

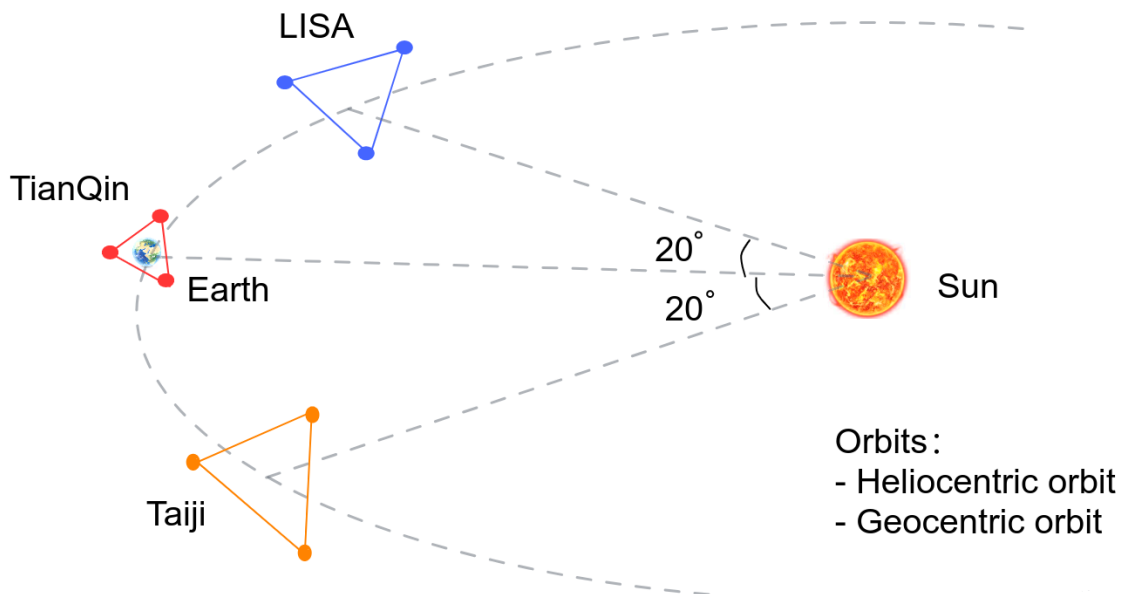


图 1-3 天琴 (TianQin)、LISA 和太极 (Taiji) 的探测器轨道位置示意图^[31]，图中探测器和星球的尺寸非真实尺寸，仅做演示使用。

1.2 恒星级双黑洞的研究现状

上文提到, LIGO 在 2015 年首次探测到引力波信号, 该信号由两个恒星级黑洞并合产生。在此之后, 恒星级双黑洞的探测主要来自地面引力波探测, LIGO 等探测器的成功运行促进了恒星级双黑洞演化理论的发展; 另一方面, 许多学者开始讨论恒星级双黑洞的空间引力波探测; 进一步地, 考虑空间探测和地面探测各自的优势, 近年来也出现了一些基于二者结合的多波段引力波探测的讨论, 并相应地指出其可以对天文学与物理学带来的潜在贡献。

而在此之前, 恒星级黑洞的研究主要依赖电磁波进行间接观测, 即黑洞的强引力对其周围物质的吸积与加速和伴星运动轨迹的影响, 可以产生电磁波信号。一种典型的观测手段就是基于 X 射线双星的观测, 密近双星在演化过程中, 先演化成致密星的子星会对伴星进行吸积, 致密星表面引力越强, 被吸积物质的引力势能就越多, 物质下落就会转化出更多的热能, 吸积盘温度就越高, 对应光子能量越高。因此像中子星和黑洞这样的子星可以发出 X 射线波段的辐射, 特别是黑洞还可以有更高能的辐射, 通过确认高能辐射区域的尺度是否为黑洞尺度, 可以间接地确认该天体是否为黑洞^[32], 最早被认为是黑洞的 X 射线源是著名的天鹅座 X-1^[33, 34]。

1.2.1 地面引力波探测

LIGO/Virgo 的观测采用的是分阶段的观测周期 (Observing Run) 模式。截至目前, 已经完成了 O1、O2 和分为 O3a 与 O3b 两个部分的 O3 三个阶段, 而第四阶段 O4 则正在进行中²。探测到的事件根据不同筛选处理流程被整理入多个源表, 如 LIGO/Virgo 合作组官方的 GWTC 系列^[35–38] 和基于公开数据再分析的 OGC 系列^[39–42]。具体在前三个阶段中, 共探测到 90 余起引力波事件, 而其中大部分都来源于恒星级双黑洞系统。恒星级双黑洞也因此成为物理与天文领域重要的研究对象: 其探测不仅可以揭示双黑洞自身的物理特性, 也可以用于分析其族群性质^[43–46]。

地面引力波探测器的信号探测方法主要可以分为两大类: 模型依赖型和非模型依赖型。最早投入使用的流水线是针对引力波暴的 Coherent WaveBurst (cWB), 这是一种非模型依赖型的探测方法^[47, 48]。随后, Cannon 等人开发了支持低延迟搜索的 GstLAL^[49, 50], 而 Usman 等人构建了 PyCBC 探测流水线, 其低延迟搜索版本称为 PyCBC Live^[51, 52], 这两种流水线都依赖于波形模板进行匹配滤波搜索。另一方面, 对于已知引力波信号参数测量, 则多基于贝叶斯推断的方法, 我们将在后面的章节详细介绍。

²<https://gracedb.ligo.org/superevents/public/O4/>

从前恒星级黑洞的研究主要依赖于电磁波的间接观测，X 射线观测到的黑洞，其质量通常大于 $5M_{\odot}$ ，中子星的临界质量约为 $3M_{\odot}$ ，这就导致黑洞的质量范围仿佛出现了质量间隙 (mass gap)——而 LIGO/Virgo 的观测到的两起引力波事件，GW190425 和 GW190814，对电磁观测给出的该质量间隙提出了挑战。对于 GW190425，在 90% 的置信区间下其双星质量范围是 $1.12 - 2.52M_{\odot}$ ，其源坐标系下的总质量为 $3.4^{+0.3}_{-0.1}M_{\odot}$ ，而目前的研究并不能够排除其为黑洞的可能性^[53]；对于 GW190814，这是由 $23M_{\odot}$ 的黑洞和 $2.6M_{\odot}$ 的致密星并合产生的信号，是目前为止用引力波手段测量到的质量比最悬殊的系统，此外，该次级质量落在了质量间隙范围，可能是中子星也可能是黑洞^[54]。

上述质量间隙又被称为低质量间隙。恒星坍缩模型理论预言，随着前身星质量增加，其演化过程会经历生对不稳定超新星 (pair-instability supernova, PISN) 过程^[55]，对于零龄主序质量大于 $50M_{\odot}$ 的恒星，PISN 过程将导致全部的质量损失，只有前身星质量足够大，才会因为光致蜕变效应抑制 PISN 过程，产生质量较大的黑洞，因此把 $50 - 130M_{\odot}$ 称为黑洞的高质量间隙^[56]。而另一方面，中等质量黑洞通常指质量介于 $10^2 - 10^5M_{\odot}$ 之间的黑洞，被视为恒星级黑洞与超大质量黑洞之间的重要桥梁，其探测对于揭示黑洞形成机制和星系演化具有重大科学意义^[57]。然而，长期以来黑洞的观测结果均符合高质量间隙的限制^[58]，一直未能确认高质量间隙内黑洞的存在，直到 GW190521 的发现打破了这一局面——该事件为两个质量分别为 $85M_{\odot}$ 和 $66M_{\odot}$ 的黑洞并合，不仅组分质量均落在高质量间隙中，而且并合形成的黑洞质量超过 $100M_{\odot}$ ，是人类首次明确探测到的中等质量黑洞^[59]。

引力波的观测结果还促进了多信使天文学的发展。当前已知宇宙中有四种信使——电磁波、引力波、中微子和宇宙射线，多信使观测意味着人们可以从不同角度的信息理解同一个天体事件。GW170817 是 LIGO/Virgo 观测到 NGC4993 的中子星并合产生的长达 100 秒的引力波信号^[60]。在该信号被接收的约 1.7 秒后，由 Fermi 空间望远镜和 INTEGRAL 观测到伽马射线爆发 GRB170817A，随后由哈勃太空望远镜、Swift、钱德拉 X 射线天文台和甚大阵 VLA 等补充了该事件不同电磁波段的探测结果，最终该事件共被 7 大洲加上太空的 70 多个观测站所观测到，是首次观测到有电磁辐射对应的引力波事件^[61]。虽然双黑洞预期并不会产生电磁信号，但上文提到，如果考虑黑洞与周围物质相互作用，则会间接产生电磁辐射。值得一提的是，已有研究探讨了 GW150914、GW190521 等事件可能存在电磁对应体的情形，尽管目前尚缺乏确凿证据^[62, 63]。

特别地，也有一些研究对于偏心率参数专门做了讨论。由于引力波的圆化效应，地面探测器在进行搜索时一般采用准圆轨道的波形进行搜索。随后，LIGO/Virgo

团队通过使用带偏心率的波形重新进行数据搜索，但仍未搜寻到新的高显著度引力波信号^[64, 65]；吴仕超等人通过用带偏心率的波形重新计算 GWTC-1^[35] 中的 10 个双黑洞事件的偏心率，发现这些源的偏心率上限基本都很低，而上限高于 0.1 的有 GW151226、GW170608 和 GW170729，但不能排除这样的估计结果是因为忽略了其自旋效应或信噪比较低导致^[66]；而 Romero-Shaw 等人则利用含自旋的偏心率波形，同样计算 GWTC-1 中事件的偏心率，发现参考频率为 10Hz 情况下，所有事件均符合零偏心率的假设，其偏心率上限在 90% 置信区间情况下从 0.02 到 0.05 不等^[67]；值得一提的是，对于 GW190521，有系列研究指出该源很可能带有较高的偏心率 ($e \sim 0.7$)，因而该双黑洞系统更偏向于动力学俘获起源^[68–70]。继 GW190521 事件以后，也陆续出现了三个事件被认为可能含有偏心率 $e_{10\text{Hz}} \geq 0.1$ ^[71, 72]。Ramos-Buades 等人对地面探测器的引力波探测手段进行了相关研究，该研究指出对于 $> 20M_{\odot}$ 的高啁啾质量和低偏心率 ($e_{30\text{Hz}} < 0.3$) 的源，PyCBC 的匹配滤波搜索效果要比 cWB 好，反之则是非模型依赖的 cWB 效果更好^[73]；Favata 等人指出对于地面探测器，降低探测频段的低频极限是改善对偏心率参数的测量的关键设计因素，并根据啁啾质量和偏心率的简并关系提出了可以用离心啁啾质量参数作为实际测量参数^[74]。此外，Lenon 等人通过对带偏心率的双中子星探测的讨论，指出对于下一代地面探测器，由于探测精度的提高，仍然使用准圆轨道的模板进行匹配滤波搜索在 $e_{7\text{Hz}} \gtrsim 10^{-3}$ 将会带来不可忽视的系统误差，因此未来的引力波探测，偏心率将是不可忽略的物理参数^[75]。引入偏心率不仅可以打破参数简并，提高源的精度测量^[76, 77]，还使得对广义相对论的检验更具可信度^[78, 79]。

然而，仅凭地面探测器捕捉恒星级双黑洞信号存在局限。由于地面探测器侧重高频段，仅能记录并合前后几秒内的信号，而受引力波圆化效应影响，此时轨道偏心率几乎消失，导致早期物理特征丢失，从而增加了研究双黑洞演化的难度。同时，仅在并合阶段检测到信号，难以实现早期预警，也不利于后续的多信使联合探测。因此，需要借助空间探测器来填补低频段引力波探测的空缺。

1.2.2 空间引力波探测

恒星级双黑洞系统还在旋近阶段时，离并合时间越远，其辐射的引力波频率越低，并合前几年的信号均会落在空间探测器的频率范围内。这不仅为引力波事件的早期预警提供了可能，同时保留了双黑洞早期演化的重要信息，因此对其探测具有重要的科学意义。鉴于空间探测器尚处于规划和建设阶段，目前暂无实际的探测数据和参数估计结果，但大量工作表明，空间探测器对恒星级双黑洞的测量也将预期加深我们对双黑洞本身及基础物理领域的理解。

刘帅等人对于天琴及其与 LISA 的联合观测的情况, 评估了其预期对恒星级双黑洞的探测能力^[80]。该研究指出, 在不同黑洞质量分布模型下天琴可观测的信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 大于 8 的源约为几个到十几个, 若考虑天琴和 LISA 联合观测, 则探测数可以增加至几十个。并且天琴对于并合时间的估计精度可以达到 1s, 空间定位精度可以达到 0.1deg^2 , 由此说明天琴将有能力为地面引力波探测器提供相对准确的时空预警, 且天琴的精度估计小到足以对源的宿主星系做出限制, 这对后续的多信使观测也极为有利。值得一提的是, 天琴对质量参数的相对测量精度可达 10^{-7} , 对偏心率的相对测量精度可达 10^{-4} , 这使得天琴对于促进区分恒星级双黑洞形成机制成为可能。Nishizawa 等人也指出, 即使引力波频率 0.01Hz 处偏心率 $e_{0.01} \sim 10^{-3}$, LISA 依然可以保证在五年观测时长情况下有 90% 的源可以与无偏心率情况区分开^[81, 82]。也有研究指出, 高偏心率系统波形振幅在低频处远小于准圆轨道系统振幅, 在毫赫兹频段的高偏心率系统可能会被 LISA 或太极这样的探测器错过, 因此类似天琴和 DECIGO 这种在分赫兹 (Deci-Hertz) 处灵敏度更高的探测器将更有机会探测这类系统^[83]。此外, 在分赫兹频段引力波探测中引入偏心率参数, 可以进一步提高源距离参数的测量精度, 从而有助于“暗汽笛” (dark siren) 的构建, 推动宇宙学参数的精确测定^[84]。

对于类 GW190521 的源还有很多进一步的讨论。Toubiana 等人指出可以通过 LISA 来探测这样的源的环境效应^[85]; 而 Holgado 等人指出, 如果这样的源偏心率接近零, LISA 将可以探测到其旋近信号^[86]; 如果预期有较大的偏心率, 这样的引力波信号则会错过 LISA 的频段^[68]; 类似地, 对于天琴, 刘帅等人指出, 即便信噪比阈值从 8 提高至 12, 天琴将依旧可以观测到这样的源, 并给出高偏心率精度 (10^{-4}) 和时空定位精度 (1s, 0.1deg^2), 进而可以对哈勃常数做出限制^[87]。

在利用贝叶斯推断方法来对空间探测器中信号做测量方面, Cornish 和 Crowder 在 2005 年通过测量 LISA 中的大质量双黑洞进行了首次尝试, 并验证了该方法的有效性^[88]。在恒星级双黑洞方面, 由于所处频段不同, 不能像在处理大质量双黑洞时使用低频近似, 即 Michelson 响应函数, 因此 Marsat 和 Toubiana 等人在做参数估计时使用了时间延迟干涉 (time delay interferometry, TDI) 响应, 我们将在后面具体介绍这一技术。参数估计结果显示, LISA 对于恒星级双黑洞啁啾质量的限制, 其相对误差可以小于 10^{-4} , 而空间定位能力可低于 0.4deg^2 ^[89, 90]。Buscicchio 等人则在无噪声假设下, 实现了对 LISA 数据挑战 (LISA Data Challenge, LDC)^[91] 中 22 个恒星级双黑洞信号源的辨识, 并对于信噪比 15 的源实现了小偏心率的辨识 ($e_{10\text{mHz}} \sim 3 \times 10^{-3}$)^[92]。此外, 吕翔宇等人探究了天琴及天琴与 LISA 联合探测时对恒星级双黑洞的测量能力, 并指出联合探测的测量精度相比二者各自单独的测

量精度都有显著提升^[93]。

空间引力波探测器虽然弥补了地面探测器的许多局限性，但在探测恒星级双黑洞方面仍然面临一定的挑战。在地面引力波探测中，恒星级双黑洞信号通常通过匹配滤波方法进行探测。匹配滤波方法需要构建一套波形模板库，确保参数空间内的任何信号都能找到足够相似的模板进行匹配，后续章节将详细描述这一方法。然而由于信号持续时间较长，空间探测器需要一个模板数高达 $N_T \gtrsim 10^{35}$ 的庞大波形模板库以充分覆盖参数空间^[94]——对比地面探测器情况下只需 $\lesssim 4 \times 10^5$ 个模板^[95]，过多的模板需求大幅加重了计算负担。此外，模板过多还会提升探测器的信噪比阈值，从而显著降低预期的探测数量。例如对于 LIGO/Virgo 信噪比阈值被设置为 8^[96]，而同样的源对于空间探测器则预计需要达到 ~ 15 ^[94]。更令人担忧的是，相比地面探测器能够以高信噪比探测并合前后的信号，空间探测器在探测恒星级双黑洞低频旋近信号时，难以积累足够高的信噪比。此外，由于数据长度通常以年为量级，且其天线响应函数随时间变化，空间探测器在处理恒星级双黑洞数据时面临极大的计算挑战。

针对以上问题，近几年人们做出了一些方向上的尝试。Digman 等人讨论了使用以小波为基础的似然函数进行贝叶斯推断，从而相比标准频域方法计算速度加快几个数量级，并使得处理非稳态噪声成为了可能^[97]。Bandopadhyay 和 Moore 提出引入半相干搜索和粒子群方法来解决空间探测在计算资源上的问题，并在使用 GPU 加速以后速度有进一步提升，且有能力探测低偏心率的源^[98, 99]。付瑶等人通过参数分区搜索以及半相干 F 统计的方法，同样结合粒子群和 GPU 加速，实现了含噪声假设下的高效搜索，并在信噪比约 11 到 14 时仍可以给出高精度参数估计，例如低偏心率情况下相对误差可以达到 1%^[100]。此外，张雪婷等人实现了机器学习方法对恒星级双黑洞的空间引力波探测^[101]。但以上的研究都需要信号本身较高的信噪比，而这对于空间探测器里的恒星级双黑洞要求并不低。因此如何更好地实现对恒星级双黑洞系统的空间引力波探测与测量，既能考虑到偏心率的影响，又能考虑噪声，兼顾计算成本以及信噪比阈值的选取，仍然是一个亟待解决的问题。

1.2.3 多波段联合探测

预计到 2035 年前后，下一代地面引力波探测器（ET、CE）的运行期将与空间引力波探测计划的观测窗口重叠，并可显著提升对恒星级双黑洞的信噪比，这使得引力波的多波段联合探测成为了可能。多波段探测旨在将不同波段的探测优势加以互补，可以多角度分析同一天体事件，并相互印证。

在 2016 年，Sesana 首次提出了利用多波段方法探测恒星级双黑洞的设想^[102, 103]，

并指出 LISA 能够实现大约 ($< 10\text{s}, < 1\text{deg}^2$) 的时间和空间定位精度, 从而为后续的地面和电磁观测提供较为可靠的预警。随后, Vitale 等人提出, 由于空间探测器能够实现更长时间的观测, 其在测量波形轨道相位上具有更高精度, 结合地面观测数据, 有助于对广义相对论进行更严格的检验^[104]。此外, Klein 等人指出, 对部分恒星级双黑洞事件进行多波段观测, 预期能够对全部 17 个参数实现百分比级的相对测量精度, 这不仅可能有助于确定事件的宿主星系, 还能使空间探测器提前预知并合时刻^[105]。特别地, Tso 等人认为, 多波段探测引力波由于能够预测并合时刻, 因而可以通过窄带调节提高次级铃宕谐频的探测灵敏度, 从而更有利于黑洞光谱学的测量和对广义相对论的检验^[106]。

Wong 等人首次引入了档案搜索 (archival search) 的概念, 即借助地面探测器捕获的引力波事件, 在空间探测器数据中进行有针对性的回溯搜索, 从而大幅降低探测所需的信噪比阈值并提升探测事件数量^[107]。Moore 等人进一步讨论指出, 地面探测器适用的恒星级双黑洞信噪比阈值并不一定适用于空间探测器, 并估算了在全空间搜索和档案搜索两种条件下, 空间引力波探测器所需波形模板的数量^[94]。最后, Ewing 等人展开讨论了基于 LISA 的档案搜索, 指出利用下一代地面探测器网络可以获得极高的参数估计精度, 可以利用这些测量结果将空间探测中的匹配滤波参数空间缩减至仅剩啁啾质量这一维度, 使模板库规模锐降至 $\lesssim 10^5$, 且信噪比阈值降低至 4.3 – 5.7, 远低于之前研究中提出的 14 和 8 的信噪比阈值要求^[108]。

1.3 研究目标

通过上一节的讨论, 可以知道, 恒星级双黑洞作为一种多波段的引力波源, 可以考虑通过多波段联合探测, 以兼顾地面与空间探测器各自的优势。而下一代地面引力波探测器与空间引力波探测计划运行时间相贴合, 为引力波的多波段联合探测提供条件。特别地, 通过基于地面探测器的档案搜索, 可以帮助空间探测器缩小参数空间, 减少计算资源。目前已有系列工作对空间引力波探测器在多波段探测下的角色做了充分讨论^[94, 102, 103, 107, 108], 特别是针对 LISA 的档案搜索做了讨论, 指出对于下一代地面探测器网络, 其探测结果对于大部分参数来说估计精度都非常高, 可通过下一代地面探测器网络的结果, 将空间探测的匹配滤波参数空间范围限制到只有啁啾质量。

而另一方面, 此前的研究多聚焦于理论方案的讨论, 尚未形成完整的端到端的数据处理流水线。同样, 对于空间探测器下偏心率参数的探测, 也多局限于初步的精度评估。因此在前人的讨论基础上, 数据处理流水线的实现不仅有很高的可行性,

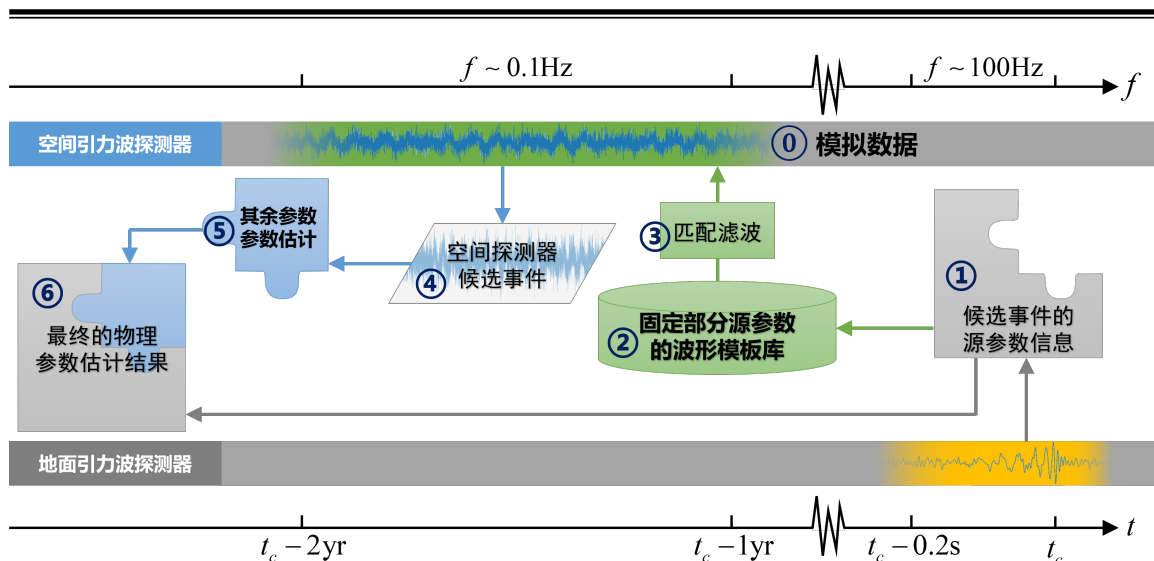


图 1-4 档案搜索数据处理流水线示意图。图中引力波波形、时间区间和频率区间仅做演示。

同时也具有实际的科学意义——本课题旨在针对未来的地面引力波探测事件，搭建首个涵盖了“数据模拟-信号探测-信号测量”全过程的空间引力波档案搜索流水线（如图1-4）。并且我们将首次在档案搜索中考虑偏心率这一关键参数，进而利用基于该流水线的模拟，给出空间引力波探测预期对恒星级双黑洞形成机制的限制能力。具体地，本课题的主要内容可分为：

- 评估下一代地面引力波探测可以将参数空间缩减的程度；
- 将实际使用的波形加入空间探测器天线响应，以保持后续的探测过程对空间探测器的合理性；
- 完成适用于不同空间探测器的引力波数据模拟软件；
- 基于已有的模拟软件，实现适用于档案搜索的波形模板库生成程序；
- 在缩减后的参数空间上加入额外的物理参数（本课题主要考虑偏心率），生成对应的波形模板库；
- 分析在档案搜索条件下模板库考虑额外参数（偏心率）的必要性；
- 完成数据处理流水线的探测部分，检验其实际探测能力并估计信噪比阈值；
- 通过贝叶斯推断的方法，评估下一代地面探测器的探测能力，并以此作为档案搜索信号测量部分的先验信息；
- 通过贝叶斯推断的方法，完成数据处理流水线的测量部分；
- 针对已有的流水线给出进一步优化，通过合理的解决方案避免进行贝叶斯推断时使用大量计算资源。

1.4 论文结构与章节安排

本论文共分为七章，每章具体内容安排如下：

第一章概述了本课题的背景、现状与目标。首先介绍了恒星级双黑洞及其形成机制，指出其为多波段引力波源，接着回顾了引力波探测历程及典型的引力波探测器。随后通过地面、空间和联合探测三部分论述了恒星级双黑洞的研究进展。最后明确了本课题的研究目标与内容。

第二章将系统阐述如何生成恒星级双黑洞的引力波波形。首先，我们将通过平面引力波的推导引入引力波的基本概念，并介绍恒星级双黑洞引力波的性质。随后，整理前人提出的各类模型，讨论偏心率与恒星级双黑洞形成机制的关系。最后，结合引力波波形和各类引力波探测器的天线响应函数两方面，详细介绍波形的构建。

第三章将着重介绍引力波的数据处理方法。首先，我们将介绍所需的各类引力波探测器的噪声模型。随后，我们将讨论引力波的探测方法，展开讲解如何通过匹配滤波的方法来探测恒星级双黑洞，以及匹配滤波波形模板库的构建。最后，我们将介绍如何测量一个引力波信号的各项参数，即对引力波信号做参数估计。除了 Fisher 信息矩阵以外，我们会具体阐述如何通过贝叶斯推断来估计参数，以及在此基础上介绍似然函数的构建和不同的随机采样算法。

在第四章，由于空间引力波探测项目尚未正式运行，我们将首先进行空间引力波信号的模拟。首先，由于已有的天线响应函数不适用于含有偏心率的信号，我们将展开论述当偏心率谐频存在时，天线响应函数在计算时所需的修正。随后，我们将介绍本课题设计的多任务空间引力波数据模拟软件 `GWSpace`。最后，我们将基于该软件简要讨论恒星级双黑洞信噪比和空间方位的关系。

在第五章，我们将在已有的数据模拟软件基础上，开始进行恒星级双黑洞的档案搜索。具体地，我们将首先估算未来地面探测器网络的探测能力，以确定空间探测的参数范围。然后我们将通过增改已有的地面探测器模板库生成软件，实现其对空间探测器的支持，从而得到空间探测器所需的模板库。最后通过模板库的生成结果进行相应的检验，以及针对信噪比阈值等更多方面给出进一步的讨论。

在第六章，我们针对未来的档案搜索场景，对档案搜索事件进行参数估计。首先，我们将采用贝叶斯推断的方法进行未来地面探测器网络下的参数估计。随后我们使用该结果作为空间探测器参数估计时的先验信息，结合其他物理参数的设置，进行空间探测器下的参数测量。最后我们将针对测量结果以及参数估计时的加速方法给出进一步讨论。

第七章将简要总结本课题的内容与结论，并给出针对未来工作的展望。

第 2 章 恒星级双黑洞的引力波

在开始进行数据处理之前，我们需要了解恒星级双黑洞的引力波及其基本性质。特别地，根据上一章的调研，我们还需要深入探究恒星级双黑洞系统的偏心率参数及其与系统形成机制的联系。最后，我们将详细讨论怎样对恒星级双黑洞的引力波信号进行建模。

2.1 双星系统的引力波

平面引力波 在介绍双星系统引力波之前，首先需要借助平面引力波的推导介绍一些引力理论的基本概念。在弱场近似下，引力场的度规可以表示为：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2-1)$$

即由平直时空背景的 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ 和微扰项 $h_{\mu\nu}$ 叠加组成。线性近似下，推导过程中只保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，则有线性近似下的 Christoffel 符号

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\nu\lambda,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\nu,\mu}^{\alpha} + h_{\mu,\nu}^{\alpha} - h_{\mu\nu}^{\alpha}), \end{aligned} \quad (2-2)$$

以及由 Riemann 张量缩并而来的 Ricci 张量

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv g^{\alpha\sigma} R_{\alpha\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \\ &= \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \\ &\approx \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (h_{\mu,\nu,\sigma}^{\sigma} + h_{\nu,\mu,\sigma}^{\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - h_{,\mu,\nu}^{\sigma}), \end{aligned} \quad (2-3)$$

方便起见，这里定义了 $h_{\mu\nu}$ 的迹 $h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ （弱场近似使用平直时空背景进行张量指标升降）。此外，可以定义 $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ ，代入 Einstein 场方程¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2-4)$$

¹在整篇论文中，如无特别标明，公式均采用自然单位制，即 $G = c = 1$ 。

有

$$\bar{h}_{\mu\nu,\sigma}^{\cdot\sigma} + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\sigma\alpha}^{\cdot\sigma,\alpha} - \bar{h}_{\mu\sigma,\nu}^{\cdot\sigma} + \bar{h}_{\nu\sigma,\mu}^{\cdot\sigma} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-5)$$

考虑谐和坐标条件

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (2-6)$$

线性化后有

$$\bar{h}_{\mu\sigma}^{\cdot\sigma} = 0. \quad (2-7)$$

那么场方程由此可以简化为

$$\bar{h}_{\mu\nu,\sigma}^{\cdot\sigma} \equiv \square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (2-8)$$

这就是谐和坐标下的线性化的引力场方程， $\square \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta$ 是 d'Alembert 算符，式(2-7)也叫引力势的 Lorentz 规范条件。

可以看到，式(2-8)形式上就是平直时空下的波动方程——和电磁场类似，引力场也存在波动解，而引力波的速度就是光速 c 。考虑引力波在真空中传播的情形，能量动量张量 $T_{\mu\nu} = 0$ ，则有

$$\bar{h}_{\mu\nu,\sigma}^{\cdot\sigma} = 0. \quad (2-9)$$

考虑沿 z 方向传播的平面波，则引力波的解可以写成

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\mu x^\mu). \quad (2-10)$$

然而， $h_{\mu\nu}$ 是一个对称的 4×4 矩阵，因此初看有 10 个独立分量，而式(2-9)只能提供 4 个约束条件。不过需要注意的是，由于 Einstein 场方程具有坐标不变性 (diffeomorphism invariance)，可以做一个微扰坐标变换

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu, \quad (2-11)$$

弱场极限下有

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (2-12)$$

其中 ξ^μ 是任意与 $h_{\mu\nu}$ 同级的小量，因此可以通过适当选取 ξ^μ 来消除 $h_{\mu\nu}$ 的 4 个自由度。

由此可知， $h_{\mu\nu}$ 真正具有传播性质的自由度只有两个。为了更直观地体现这一点，通常选取横向无迹规范 (transverse-traceless gauge, TT gauge):

1) 时间分量归零，只保留空间分量： $h_{0\mu} = 0$

2) 横向条件： $h_{ij,i} = 0$

3) 无迹条件： $h = 0$ ，即 $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$

选取引力波传播方向为 z 方向，则 $h_{\mu\nu}$ 在 TT 规范下的具体形式可以写为

$$h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-13)$$

其中 h_+ 和 $h_\times$ 被称为加模和叉模，是引力波的两种极化模式。具体可以展开写为

$$h_+(t, \mathbf{x}) = A_+ \exp[-i\omega(t - z)], \quad h_\times(t, \mathbf{x}) = A_\times \exp[-i\omega(t - z)]. \quad (2-14)$$

至此，我们简单介绍了引力波理论的基本架构，接下来我们将开始着眼于更实际的物理场景，考虑双星系统辐射的引力波及其性质。

双黑洞的引力波 前面我们提到，双黑洞的演化过程可以分为旋近、并合和铃宕三个阶段。对于本课题考虑恒星级双黑洞系统，其在空间探测器灵敏频段内时处于旋近阶段，因此我们将针对最低阶近似下的双星引力波旋近阶段展开讨论。

回到式(2-8)，它的解有以下形式

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(t_r, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2-15)$$

其中推迟时间 $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ， $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}'$ 为观测者和源的位置。考虑源在观测点的远处，即距离 D 远大于源的尺度，则

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{D}, \quad t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx t - D + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'. \quad (2-16)$$

那么可以对 $T_{\mu\nu}$ 做关于 t_r 的 Taylor 展开，考虑非相对论近似，则引力波源能量动量张量的分量主要集中在 $T_{00} = \rho$ 上。首先以能量密度 ρ 定义质量四极矩：

$$I^{ij}(t) = \int d^3x' \rho(t, \mathbf{x}') x'^i x'^j. \quad (2-17)$$

利用能量守恒关系 $T_{,\mu}^{\mu\nu} = 0$ ，可以证明

$$\int d^3x T_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I^{ij}(t). \quad (2-18)$$

则空间分量

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{2}{D} \ddot{I}^{ij}(t - D), \quad (2-19)$$

其中 $\ddot{I}^{ij}$ 表示对时间的二阶导数。

对于双黑洞系统，可以考虑两个绕整体质心运动的质点，其轨道角动量方向为 z 方向，代入系统的质量四极矩到式(2-19)，并应用 TT 规范，可得双黑洞引力波的基本形式

$$h_{ij}^{\text{TT}} = -\frac{4\mu r^2 \omega^2}{D} \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2-20)$$

其中 $\mu = m_1 m_2 / M$ 为约化质量， $M = m_1 + m_2$ 为总质量，均由双黑洞质量 m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) 给出， ω 为双星绕转的角速度， r 为双星之间的距离。

接下来我们推导准圆 (quasi-circular) 轨道下，双星引力波的频率随着演化时间的关系。首先 Kepler 定律给出

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{r^3}}, \quad (2-21)$$

牛顿近似下，双星系统的总结合能可以写为

$$E = -\frac{1}{2} \frac{\mu M}{r}. \quad (2-22)$$

那么双星角速度的变化速率可以展开为

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dE} \frac{dE}{dt}, \quad (2-23)$$

其中 dE/dt 就是双星能量损失速率，弱场近似下写为

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}^{ij} \rangle, \quad (2-24)$$

这里使用国际单位制以展示对应的量纲。把双星系统的情形代入公式中，可得

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \mu^2 r^4 \omega^6, \quad (2-25)$$

考虑双星引力波频率和轨道频率的关系 $f = \omega/\pi$ ，再将以上推导代入式(2-23)可得

$$\frac{df}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \mathcal{M}^{5/3} f^{11/3}, \quad (2-26)$$

这里 $\mathcal{M} = \eta^{3/5} M$ 是啁啾质量， $\eta = m_1 m_2 / M^2$ 为对称质量比，对该式积分后可得

$$f = (5/256)^{3/8} \frac{1}{\pi} \mathcal{M}^{-5/8} (t_c - t)^{-3/8}, \quad (2-27)$$

其中 t_c 为双黑洞并合时间。可以看出，随着时间逐渐接近并合时刻，引力波的频率将会不断升高，如果将这样的频率变化与声音频率相对应，将会得到一个明显的音调升高，因此这样的引力波信号也被称作啁啾信号。

比起并合和铃宕，双黑洞系统绝大部分时间都处在旋近阶段，因此旋近阶段的探测可以在时间尺度上大量积累以提供系统的物理信息。而当演化时间逐渐接近并合时间时，式(2-27)就不再适用了，因此需要选取一个典型的分界线区分旋近与并合阶段，一般选取的是双黑洞间距离达到最内稳定圆轨道 (ISCO) 的时刻，其对应的引力波频率为 $f_{\text{ISCO}} = 1/(6^{3/2} \pi M)$ 。

2.2 恒星级双黑洞的偏心率

在上一节中，我们在最低阶近似下推导得出了准圆轨道下引力波频率随演化时间变化的关系。然而，实际上许多恒星级双黑洞系统的轨道存在显著的偏心率，这不仅影响了引力波的辐射特性，同时也是理解系统形成机制和所处天体环境所需的重要参数。

首先，在弱场近似和牛顿动力学框架下，含偏心率的双星系统对椭圆轨道进行周期平均后，其引力波辐射功率可写为^[109]

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right), \quad (2-28)$$

其中 a 为椭圆轨道的半长轴。通过与式(2-25)对比可以发现，含偏心率的轨道相比于圆轨道的能量损失率多出一个关于偏心率 e 的因子

$$g(e) = (1 - e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \quad (2-29)$$

可以看出，轨道偏心率越高，引力波辐射效率也越显著。进一步地，通过能量和角

动量的守恒，可以推导出半长轴和偏心率的关系满足以下微分方程^[110]

$$\left\langle \frac{da}{de} \right\rangle = \frac{12 a}{19 e} \frac{\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)}{\left(1 - e^2\right) \left(1 + \frac{121}{304}e^2\right)}. \quad (2-30)$$

这一公式表明，随着双星系统不断通过引力波辐射损失能量，轨道逐渐收缩的同时，偏心率也会逐步减小，这正是在前文中提到的圆化效应。对上述微分方程积分后可得

$$a(e) = C_0 \frac{e^{12/19}}{1 - e^2} \left[1 + \frac{121}{304}e^2\right]^{870/2299}, \quad (2-31)$$

其中 C_0 是与初始条件有关的常数。考虑到 Kepler 定律中轨道频率与半长轴的关系，即 $f \propto a^{-3/2}$ ，则通过定义一个参考频率 f_* 及其对应的偏心率 e_* ，可以把频率和偏心率之间的关系写为

$$\frac{f}{f_*} = \left[\frac{1 - e_*^2}{1 - e^2} \left(\frac{e}{e_*}\right)^{12/19} \left(\frac{1 + \frac{121}{304}e^2}{1 + \frac{121}{304}e_*^2}\right)^{870/2299} \right]^{-3/2}. \quad (2-32)$$

显然，该比值关系同样适用于引力波频率的计算。

上述推导不仅阐明了引力波辐射过程中轨道参数的演化规律，也为进一步研究偏心率与双黑洞系统形成机制之间的内在联系奠定了基础。前文中，我们指出恒星级双黑洞的形成主要依赖于协同演化和动力学俘获两种机制，并认为其轨道偏心率可作为区分不同形成途径的潜在探针。事实上，现有研究已提出了多种更为具体的演化模型，各自对应的参数分布也存在显著差异^[111]。接下来，我们将展开探讨偏心率与双黑洞系统形成机制之间的关联。如图2-1，我们整理了不同模型下预期观测到的恒星级双黑洞轨道偏心率的分布情况：

双星孤立地共同演化 (In field) 时，引力波频率 0.01Hz 对应的偏心率大小约为 $e_{0.01} \lesssim 10^{-3}$ ^[112, 113]；而通过在球状星团中动力学演化形成的双黑洞，如果在并合时已经被抛出到星团外 (Outside cluster)，则偏心率分布与孤立演化的情况相似 ($e_{0.01} \lesssim 10^{-2}$)^[113, 114]；继续在球状星团内部演化直到并合 (Inside cluster) 的系统则会保留更高的偏心率 ($e_{0.01} \gtrsim 10^{-2}$)^[115]；对于在更加复杂的天体物理环境中的双黑洞，例如在活动星系核 (Active Galactic Nuclei, AGN) 内或涉及三体系统情形的双黑洞，这些系统可以有非常极端的轨道偏心率 ($e_{0.01} \sim 1$)^[3, 4, 116-118]。

由此可见，不同演化途径的恒星级双黑洞系统，其轨道偏心率有较为显著的分度。然而即便是考虑下一代地面探测器，其可以探测的最小偏心率仍然在 $e_{1\text{Hz}} \sim 10^{-2}$ 的量级（如图2-1）。与不同形成机制下预期的偏心率分布范围相比，这样的

下限难以区分所有类型。这主要是因为考虑式(2-32)，若仅保留最低阶的线性项并以初始频率作为参考频率，则偏心率与引力波频率之间的关系可以近似为 $e \sim e_i(f/f_i)^{-19/18}$ 。那么假设恒星级双黑洞进入地面探测器的频段 ($f \gtrsim 1\text{Hz}$) 时偏心率为 10^{-3} ，则该系统在 $f_i \sim 0.01\text{Hz}$ 的演化早期可能会有明显较高的偏心率 $e_i \sim 0.1$ 。这一现象正是地面探测器在其灵敏频段内难以高精度限制系统偏心率的主要原因。

相较之下， 0.01Hz 附近正处于空间探测器的灵敏频段。空间探测器有能力探测 $e_{0.01} \gtrsim 10^{-3}$ 的恒星级双黑洞^[80, 81]，这个数值要远远低于当前乃至下一代地面探测器的偏心率探测下限。因此，空间探测器可以为偏心率的高精度测量提供新的机遇，并显著提升了区分不同形成机制双黑洞系统的能力。基于这一优势，本课题将以**偏心率**作为主要研究参数，此外，我们还将在后续章节中对图2-1给出进一步的讨论。

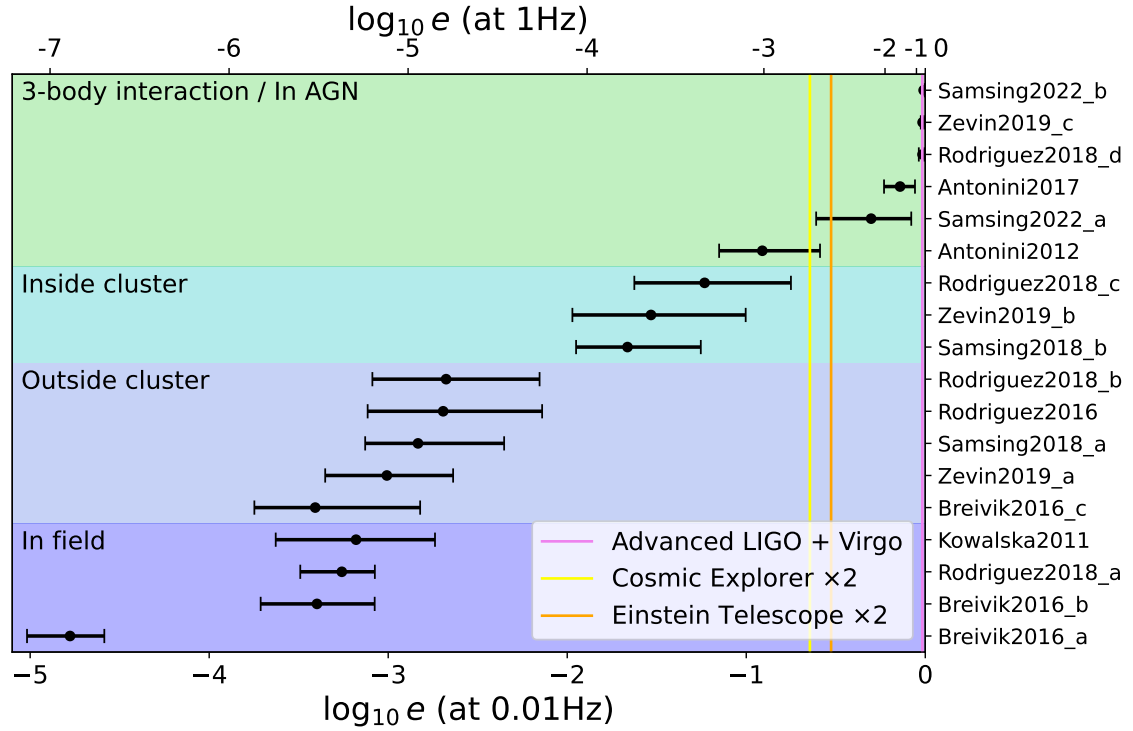


图 2-1 不同模型下恒星级双黑洞轨道偏心率的分布情况，黑色点和误差棒分别对应该模型给出的偏心率分布的中位数和 50% 置信区间^[3, 4, 112–117, 119]。实心竖线代表不同引力波探测器可探测的最小偏心率^[120]。图中所有的偏心率大小均统一转换成在引力波频率 0.01Hz （下轴）或 1Hz 时（上轴）对应的偏心率（见式(2-32)），注意这种偏心率的转换仅供参考，特别是高偏心率类型的一些系统形成时引力波频率就已经高于 1Hz 了^[4, 115]。

2.3 引力波信号的建模

在简单介绍了引力波理论基础后，我们探讨了本课题重点关注的物理场景。接下来，我们需要对含偏心率的引力波信号进行建模，而这个过程主要分为两部分。一部分是对源坐标系下的引力波进行建模，目前领域内已发展出多种适合不同场景的波形模型；另一部分是对于特定引力波探测器，其对不同方位引力波信号的响应不同，因此必须给出相对应的天线响应函数。

2.3.1 引力波波形

上文提到，引力波探测一个主要的方法是匹配滤波，而引力波波形模板在其中起着至关重要的作用。在实际探测中，根据不同使用场景，需要对计算速度与计算精度作出不同的权衡，因而需要在多种波形中挑选合适的波形用于模拟或计算。

对于双黑洞系统，不同演化阶段的引力波信号描述方法不同。旋近阶段，双黑洞的距离相对较远，因此这个阶段的引力波信号可以由 Einstein 场方程的后牛顿 (post-Newtonian, PN) 近似描述。而在并合阶段，这时候的信号不再适合后牛顿等类型的解析近似，而是必须要利用数值相对论，即直接对引力场方程进行数值求解。并合后的新黑洞将会经历铃宕阶段，这时的引力波振荡可以理解为对这个黑洞的一种扰动。因此，该阶段的引力波可以由微扰理论得出，具体可以由一组准正则模 (quasinormal mode, QNM) 的叠加给出，这是线性化微分方程的一种形式解，用以描述随时间推移逐渐衰减的扰动。

此外，波形可以分为时间域和频率域两大类：时域的波形更符合直觉，因为实际接收的信号就是随着时间推移不断积累的；而频域的波形在数据处理方面更为便捷，后面会提到，匹配滤波涉及大量计算内积的操作，而该操作是在频域进行的。

根据波形计算方式，波形又可以分为解析波形和数值波形两种。前者一般是只含旋近阶段的后牛顿近似波形，解析波形的优点在于有明确的波形公式，计算速度快，适合大量高效使用波形的场景；而后者模拟整个旋近到并合再到铃宕的过程，通过数值求解场方程给出引力波波形结果，计算速度慢但精度高，适合高精度信号测量等场景。

不同的波形也有不同的适用范围。例如 TaylorF2 是一个准圆轨道下的频域解析波形^[121, 122]，其中包含了 3.5PN 后牛顿展开近似（即包含速度比展开到 $\mathcal{O}((v/c)^7)$ 的修正项），但该波形只支持自旋同轴，不含进动效应，即 $\chi_1 = \chi_{1,z}, \chi_2 = \chi_{2,z}$ 。即便如此，该波形作为基础波形被广泛延伸，很多后续波形都是基于该波形构造的。数值波形主要有 SXS^[123] 和 Surrogate^[124, 125] 等系列，此外还有半解析的波形如

等效单体 (effective one body, EOB) 波形^[126, 127] 和 IMRPhenom 波形^[128–131] 等, IMRPhenom 波形的旋近阶段仍依赖 PN 波形作为校准, 例如首次同时考虑了自旋和高阶模的 IMRPhenom 波形 IMRPhenomHM^[132], 以及在此基础上进一步考虑了进动效应的 IMRPhenomXPHM^[133]。

特别地, 本课题需要考虑偏心率参数, EccentricFD 是一个 3.5PN 的频域波形^[134, 135], 该波形在 TaylorF2 基础上加入了偏心率参数, 但不考虑自旋, 其初始偏心率的有效范围可以达到 $e_i \lesssim 0.4$, 和 Taylor* 系列波形一同收录到了 LVK (即 LIGO、Virgo 和 KAGRA) 算法库组件 LALSuite 中^[136]; TaylorF2e 是另一个在 TaylorF2 基础上加入了偏心率参数的波形, 后牛顿展开到 3PN, 同样不包含自旋参数, 该波形可以支持偏心率高达 $e \sim 0.9$ ^[137, 138]; 此外, 最近有带全自旋参数的含偏心率的波形被开发出来, 并被用于 LISA 的双黑洞探测^[139, 140]。还有同时存在偏心率和高阶模的波形也有了新的进展^[141]。

2.3.2 引力波信号的天线响应

然而, 直接基于上文提到的模型所生成的引力波波形, 与我们预期从引力波探测器中获得的信号波形并不完全相同。这是因为同一引力波探测器对于不同空间方位的引力波源的探测能力是不同的, 因此对应地需要给出与空间方位相关的天线响应函数。本小节我们将给出地面探测器的响应函数, 以及空间探测器的频域响应函数, 并针对空间探测器的 TDI 响应, 相应地给出所需的探测器运行轨道的具体表达形式。

2.3.2.1 地面探测

上文提到, 在横向无迹规范下, 广义相对论下的引力波有两种极化模式 $h_+, h_\times$ 。那么响应后的波形可以表示为

$$H = h_+ P_+ + h_\times P_\times, \quad (2-33)$$

其中不同模式下的响应函数对应^[142]

$$\begin{aligned} P_+ &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}, \\ P_\times &= \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2-34)$$

其中 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 为两个极化基矢。对于极化角为 0 的情况, 定义 $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 是垂直于波矢方向 $\mathbf{k}$ 且互相垂直的两个单位向量, 即球坐标下有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= \{-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \theta\}, \\
 \mathbf{u} &= \{\sin \phi, -\cos \phi, 0\}, \\
 \mathbf{v} &= \{-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta\},
 \end{aligned} \tag{2-35}$$

则 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})(\psi = 0) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 。那么极化张量可以写为

$$\begin{aligned}
 P_+^0(\theta, \phi) &= P_+(\psi = 0) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \\
 P_\times^0(\theta, \phi) &= P_\times(\psi = 0) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u},
 \end{aligned} \tag{2-36}$$

在此基础上加入极化角的贡献，则有

$$P_+ + iP_\times = e^{-2i\psi} (P_+^0 + iP_\times^0), \tag{2-37}$$

亦即

$$\begin{aligned}
 P_+ &= P_+^0 \cos 2\psi + P_\times^0 \sin 2\psi, \\
 P_\times &= -P_+^0 \sin 2\psi + P_\times^0 \cos 2\psi.
 \end{aligned} \tag{2-38}$$

最终可以得到

$$\begin{aligned}
 P_\times(\theta, \phi, \psi) &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi, \\
 P_+(\theta, \phi, \psi) &= \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi.
 \end{aligned} \tag{2-39}$$

由于地面探测器观测时间短，地球自转的变化可以忽略，因此，对于特定 (θ, ϕ, ψ) 的引力波源，地面探测器的天线响应可以被认为是常数。

2.3.2.2 空间探测：Michelson 响应

对于天琴和 LISA 而言，三颗卫星成等边三角形分布，卫星间共有三组激光回路，任意两组都可以组成一个干涉仪，这样的干涉仪和地面干涉仪的区别在于，干涉仪两条臂的夹角为 60° 而非垂直。等边三角形构型下的三条激光干涉臂对于信号的响应，可以等效成两个互相垂直的激光干涉臂的响应，且等边三角形构型探测的等效臂长变化是垂直型的 $\sqrt{3}/2$ 倍。因此，式(2-39)自然也适用于空间探测器的 Michelson 构型，但空间探测器本身是运动的，响应会随着时间变化，因而表达形式要复杂得多。具体地，刘帅等人推导了频域下的天琴的天线响应函数^[80]：首先，基本的天线响应函数依然遵守式(2-39)，但天琴可以等效成两个独立的 Michelson 干

涉仪，两个干涉仪在角度上的选取有所区别，即

$$\begin{aligned} F_{II}^\times(\theta_S, \phi_S, \psi_S) &= F_I^\times(\theta_S, \phi_S - \pi/4, \psi_S) = P_\times(\theta_S, \phi_S - \pi/4, \psi_S), \\ F_{II}^+(\theta_S, \phi_S, \psi_S) &= F_I^+(\theta_S, \phi_S - \pi/4, \psi_S) = P_+(\theta_S, \phi_S - \pi/4, \psi_S). \end{aligned} \quad (2-40)$$

则响应后的波形应写为

$$H_\alpha(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} [F_\alpha^+(t)h_+(t - t_D) + F_\alpha^\times(t)h_\times(t - t_D)], \alpha = I, II, \quad (2-41)$$

其中 $(\theta_S, \phi_S, \psi_S)$ 是源在探测器系下的方位和极化角， $t_D = R \sin \bar{\theta}_S \cos [\bar{\Phi}(t) - \bar{\phi}_S]$ 是探测器和太阳系重心 (solar system barycenter, SSB) 的时间延迟， $R = 1\text{AU}$ ， $\bar{\Phi}(t) = \bar{\phi}_0 + 2\pi t/T$ ， $T = 1\text{yr}$ ， $\bar{\phi}_0$ 是天琴在 $t = 0$ 时刻的初始相位，带顶线的变量指的都是 SSB 坐标系下对应的值。需要注意的是，这里并没有考虑极化角随时间变化，这里需要的假设前提是不考虑自旋效应。因此通过将式(2-41)进行 Fourier 变换，即可得到频域下的响应公式：

$$\tilde{h}_\alpha(f) = \frac{\sqrt{3}}{2} \{ \mathcal{F}[h_+(t - t_D) F_\alpha^+(t)] + \mathcal{F}[h_\times(t - t_D) F_\alpha^\times(t)] \}, \quad (2-42)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h_+(t - t_D) F_1^+(t)] &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_S) \left[e^{2i\zeta_1(f-2f_0)} \tilde{h}_+(f - 2f_0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\zeta_2(f+2f_0)} \tilde{h}_+(f + 2f_0) \right] \cos 2\psi_S - \frac{i}{2} \cos \theta_S \left[-e^{2i\zeta_1(f-2f_0)} \tilde{h}_+(f - 2f_0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\zeta_2(f+2f_0)} \tilde{h}_+(f + 2f_0) \right] \sin 2\psi_S, \\ \mathcal{F}[h_\times(t - t_D) F_1^\times(t)] &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_S) \left[e^{2i\zeta_1(f-2f_0)} \tilde{h}_\times(f - 2f_0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\zeta_2(f+2f_0)} \tilde{h}_\times(f + 2f_0) \right] \sin 2\psi_S + \frac{i}{2} \cos \theta_S \left[-e^{2i\zeta_1(f-2f_0)} \tilde{h}_\times(f - 2f_0) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\zeta_2(f+2f_0)} \tilde{h}_\times(f + 2f_0) \right] \cos 2\psi_S, \\ \mathcal{F}[h_+(t - t_D) F_2^+(t)] &= \mathcal{F}\left[h_+(t - t_D) F_1^+\left(\phi_{S0} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \\ \mathcal{F}[h_\times(t - t_D) F_2^\times(t)] &= \mathcal{F}\left[h_\times(t - t_D) F_1^\times\left(\phi_{S0} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2-43)$$

其中 $\zeta_1(f) = \phi_{S0} - \pi f t_D$ ， $\zeta_2(f) = \phi_{S0} + \pi f t_D$ ， $f_0 \approx 3.18 \times 10^{-6}\text{Hz}$ 是天琴卫星绕地轨道频率， ϕ_{S0} 对应源的初始位置的方位角。

LISA 的时域响应与以上推导类似，只是运行轨道不同。但天琴轨道指向固定，求解频域响应的解析公式相对容易，以上频域响应部分的推导是不适用于 LISA 的。

2.3.2.3 空间探测：TDI 响应

Michelson 构型忽略臂长变化，考虑的是相对的理想情况，而特别是对于空间探测器，三颗无拖曳卫星在空间中绕地飞行，其不可避免地有轨道上的扰动变化，导致臂长并不像理想情况下完全相同。时间延迟干涉 (time delay interferometry, TDI) 就是用来对不等臂长情况下激光相位噪声进行扣除的一种构型方法，即通过特殊的三条臂的组合制造出虚拟的等臂长干涉仪^[143, 144]。

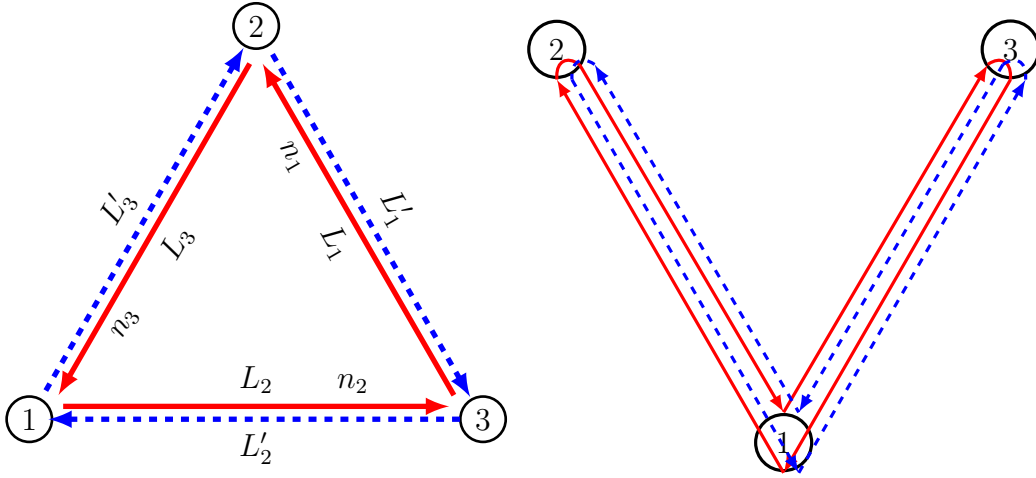


图 2-2 空间探测器激光链路示意简图^[31]。左：卫星与激光链路的标号约定，其中 n_i 代表了激光链路的单位矢量，方向与 L_i 相同， L'_i 代表了与 L_i 相反方向的激光链路。右：基础 Michelson 构造下 TDI-X 通道。实际的探测器不仅会在轨道平面上旋转，臂长也并非完全相同。

考虑 Michelson 构造下三个通道分别为 (X, Y, Z) ，其响应形式为单链路响应的叠加^[145]

$$\tilde{x} = (1 - z^2)(\tilde{y}_{31} + z\tilde{y}_{13} - \tilde{y}_{21} - z\tilde{y}_{12}), \quad (2-44)$$

其中 $\tilde{y}_{sr}$ 对应从发射卫星 s 到接收卫星 r 链路的响应， $z \equiv \exp(i2\pi fL)$ 为时间延迟算符，对应地， Y 、 Z 通道可以通过指标轮换 $(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ 得到。

(A, E, T) 通道是现今广泛使用的 TDI 通道构造方式，由 (X, Y, Z) 通道的正交线性变换给出

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Z - X), \\ E &= \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 2Y + Z), \\ T &= \frac{1}{\sqrt{3}}(X + Y + Z). \end{aligned} \quad (2-45)$$

那么 A, E, T 通道下观测量在频域内可以写为

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= (1+z)(\tilde{y}_{31} + \tilde{y}_{13}) - \tilde{y}_{23} - z\tilde{y}_{32} - \tilde{y}_{21} - z\tilde{y}_{12}, \\ \tilde{e} &= \frac{1}{\sqrt{3}} [(1-z)(\tilde{y}_{13} - \tilde{y}_{31}) + (2+z)(\tilde{y}_{12} - \tilde{y}_{32}) + (1+2z)(\tilde{y}_{21} - \tilde{y}_{23})], \\ \tilde{t} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} [\tilde{y}_{21} - \tilde{y}_{12} + \tilde{y}_{32} - \tilde{y}_{23} + \tilde{y}_{13} - \tilde{y}_{31}],\end{aligned}\quad (2-46)$$

Marsat 等人对 LISA 的 TDI 构型下的频域响应给出了进一步的推导^[90]。该研究考虑了引力波的高阶模，即引力波可以以自旋权重球谐函数 (spin-weighted spherical harmonics) 为基底做展开

$$h_+ - ih_\times = \sum_{\ell \geq 2} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_{-2}Y_{\ell m}(\iota, \varphi) h_{\ell m}, \quad (2-47)$$

(ι, φ) 对应引力波辐射的倾向角和方位角。一般考虑的主模指的是 $(\ell, m) = (2, 2)$ ，其他模式叫做高阶模 (higher modes, HMs)。基于这样的展开，则有

$$\begin{aligned}h_+ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell, m} ({}_{-2}Y_{\ell m} h_{\ell m} + {}_{-2}Y_{\ell m}^* h_{\ell m}^*), \\ h_\times &= \frac{i}{2} \sum_{\ell, m} ({}_{-2}Y_{\ell m} h_{\ell m} - {}_{-2}Y_{\ell m}^* h_{\ell m}^*).\end{aligned}\quad (2-48)$$

对于不考虑进动的双星系统，有

$$h_{\ell, -m} = (-1)^\ell h_{\ell, m}^*. \quad (2-49)$$

由此可以把两种极化方式写成谐频以极化系数做权重的求和的形式，即

$$h_{+, \times} = \sum_{\ell, m} K_{\ell m}^{+, \times} h_{\ell m}, \quad (2-50)$$

$$\begin{aligned}K_{\ell m}^+ &= \frac{1}{2} ({}_{-2}Y_{\ell m} + (-1)^\ell {}_{-2}Y_{\ell, -m}^*), \\ K_{\ell m}^\times &= \frac{i}{2} ({}_{-2}Y_{\ell m} - (-1)^\ell {}_{-2}Y_{\ell, -m}^*).\end{aligned}\quad (2-51)$$

那么可以把式(2-33)改写为

$$H = \sum_{\ell, m > 0} P_{\ell m} h_{\ell m}, \quad (2-52)$$

这样就可以把极化系数合并到极化张量中，即

$$P_{\ell m} = P_+ K_{\ell m}^+ + P_\times K_{\ell m}^\times, \quad (2-53)$$

需要注意的是，这里只考虑了 $m > 0$ 的模，这是因为后面要对正频（即 $f > 0$ ）部分的波形做 Fourier 变换，这种情况下 $m \leq 0$ 的模可以忽略，即

$$\tilde{h}_{+, \times} = \sum_{\ell} \sum_{m > 0} K_{\ell m}^{+, \times} \tilde{h}_{\ell m}. \quad (2-54)$$

最终， $P_{\ell m}$ 可以显式地写出来，即

$$\begin{aligned} P_{\ell m}(\iota, \varphi, \psi, \lambda, \beta) = & \frac{1}{2} {}_{-2}Y_{\ell m}(\iota, \varphi) e^{-2i\psi} (P_+^0 + iP_\times^0) \\ & + \frac{1}{2} (-1)^\ell {}_{-2}Y_{\ell, -m}^*(\iota, \varphi) e^{+2i\psi} (P_+^0 - iP_\times^0). \end{aligned} \quad (2-55)$$

那么单链路响应波形应写作^[145]

$$\tilde{y}_{slr} = \sum_{\ell, m} \mathcal{T}_{slr}^{\ell m}(f) \tilde{h}_{\ell m}, \quad (2-56)$$

slr 指从发射卫星 s 到接收卫星 r 的链路 l 。对于旋近速度足够快的信号，传递函数可以写作

$$\mathcal{T}_{slr}^{\ell m}(f) = G_{slr}^{\ell m}(f, t_f^{\ell m}), \quad (2-57)$$

$$\begin{aligned} G_{slr}^{\ell m}(f, t) = & \frac{i\pi f L}{2} \text{sinc}[\pi f L (1 - k \cdot n_l)] \times \\ & \exp[i\pi f (L + k \cdot (p_r + p_s))] n_l \cdot P_{\ell m} \cdot n_l, \end{aligned} \quad (2-58)$$

其中 k 是引力波波矢， n_l 是链路 l 从 s 到 r 的单位矢量， p_s, p_r 是卫星的位置（如图2-2）。这里 (n_l, p_s, p_r) 指的都是 t 时刻下的值，在式(2-57)中

$$t_f^{\ell m} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi_{\ell m}}{df}, \quad (2-59)$$

$\Psi_{\ell m}$ 指的是该谐频下（缓变）的相位：

$$\tilde{h}_{\ell m}(f) = A_{\ell m} e^{i\Psi_{\ell m}}. \quad (2-60)$$

式(2-59)描述的是特定谐频下等效时频关系，这是稳相近似 (stationary phase approximation, SPA) 的一个推广，并且同样适用于并合和铃宕阶段，这里不能将其与物理的频率如轨道频率 ω 相联系混淆^[145]。

有了单链路响应波形，对应地 A, E, T 通道下的波形有

$$\tilde{a}, \tilde{e}, \tilde{t} = \sum_{\ell, m} \mathcal{T}_{a, e, t}^{\ell m} \tilde{h}_{\ell m}. \quad (2-61)$$

实际上的 A, E, T 通道的响应还需要在此基础上乘以一个因子，即

$$\begin{aligned} \tilde{A}, \tilde{E} &= i\sqrt{2} \sin(2\pi f L) e^{2i\pi f L} \times \tilde{a}, \tilde{e}, \\ \tilde{T} &= 2\sqrt{2} \sin(\pi f L) \sin(2\pi f L) e^{3i\pi f L} \times \tilde{t}. \end{aligned} \quad (2-62)$$

以上是基于 LISA 推导的响应公式，但是可以看到，这组公式和具体卫星的轨道无关，因此也适用于天琴或其他相似探测器的情况，只需要把不同探测器轨道代入相应位置即可。

2.3.2.4 空间探测：探测器轨道的影响

上一段提到，TDI 响应需要具体应用探测器的轨道信息，因此以下我们将介绍天琴和 LISA 的轨道公式。

胡新春等人推导了天琴的轨道公式^[146]。一般地，首先考虑地心在黄道坐标系下的运动，即

$$X = r \cos \gamma, Y = r \sin \gamma, Z = 0, \quad (2-63)$$

其中 γ 是真近点角 (true anomaly)， r 是开普勒半径，即

$$r = \frac{R(1 - e_{\oplus}^2)}{1 + e_{\oplus} \cos \gamma}, \quad (2-64)$$

$R = 1\text{AU}$, $e_{\oplus} = 0.0167$ 为地球轨道偏心率。可以采取偏近点角 (eccentric anomaly) ψ 来更方便地描述轨道运动， ψ 和 γ 的关系由下式给出



ψ 和平近点角 (mean anomaly) M 的关系为

其中 $f_m = 1/(\text{one sidereal year}) = 3.14 \times 10^{-8} \text{Hz}$ 是地心的轨道调制频率, κ_0 是 $t = 0$ 时刻从春分点开始计算的黄经, β 是春分点和近日点的夹角, 如图2-3。那么, 对于 $e_{\oplus} \ll 1$, 可以把 ψ 展开, 即

那么将上式代入式(2-65), 则有 γ 的展开为

- 28 -

将式(2-68), (2-64)代入(2-63), 最终得到

$$\begin{aligned}
 X(t) &= R \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} e_{\oplus} R (\cos 2(\alpha - \beta) - 3) \\
 &\quad - \frac{3}{2} e_{\oplus}^2 R \cos(\alpha - \beta) \sin^2(\alpha - \beta) + \mathcal{O}(e_{\oplus}^3), \\
 Y(t) &= R \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} e_{\oplus} R \sin 2(\alpha - \beta) \\
 &\quad + \frac{1}{4} e_{\oplus}^2 R \sin(\alpha - \beta) (3 \cos 2(\alpha - \beta) - 1) + \mathcal{O}(e_{\oplus}^3), \\
 Z(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2-69}$$

类似地, 对于在探测器系 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 下绕地心旋转的三颗卫星, 其轨道运动和上式有相同的形式, 即对于第 n 颗卫星 ($n = 1, 2, 3$), 有

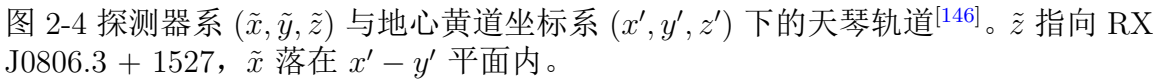
$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_n(t) &= R_1 \cos(\alpha_n - \beta') + \frac{1}{2} e_T R_1 (\cos 2(\alpha_n - \beta') - 3) \\
 &\quad - \frac{3}{2} e_T^2 R_1 \cos(\alpha_n - \beta') \sin^2(\alpha_n - \beta'), \\
 \tilde{y}_n(t) &= R_1 \sin(\alpha_n - \beta') + \frac{1}{2} e_T R_1 \sin 2(\alpha_n - \beta') \\
 &\quad + \frac{1}{4} e_T^2 R_1 \sin(\alpha_n - \beta') (3 \cos 2(\alpha_n - \beta') - 1), \\
 \tilde{z}_n(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2-70}$$

$$\alpha_n(t) = 2\pi f_0 t + \kappa_n, \kappa_n = \frac{2\pi}{3}(n-1) + \lambda, \tag{2-71}$$

e_T 是天琴的轨道偏心率 (当前指标可假设无偏心率), $R_1 = 1.0 \times 10^5 \text{km}$ 是卫星轨道的半长轴, λ 是第一颗卫星的初始轨道相位, f_0 是卫星绕引导中心 (即地心) 的轨道调制频率, β' 是从 $\tilde{x}$ 轴到卫星轨道近心点的相位。接下来需要将该轨道在地心黄道坐标系中表示出来, 如图2-4, 这里需要应用两个旋转矩阵, 即

$$\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi_s & \cos \phi_s & 0 \\ -\cos \phi_s & \sin \phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_s & \cos \theta_s \\ 0 & -\cos \theta_s & \sin \theta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \\ \tilde{z}_n \end{pmatrix}. \tag{2-72}$$

$\phi_s = 120.5^\circ, \theta_s = -4.7^\circ$ 是 RX J0806.3 + 1527 的黄经黄纬。最终, 地心黄道坐标系下的天琴轨道可以写为:



- 30 -

其中 $\alpha'_n \equiv \alpha_n - \beta'$ 。将式(2-69)和式(2-73)相加，即可得到日心黄道坐标系下的天琴轨道。

与天琴不同，LISA 的轨道是绕日轨道，因此其轨道形式相对简单^[31, 147]：

$$\begin{aligned}
 x_n &= a \cos \alpha + ae_{\text{LISA}} (\sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_n - (1 + \sin^2 \alpha) \cos \beta_n) \\
 &\quad + \frac{1}{8} ae_{\text{LISA}}^2 (3 \cos(3\alpha - 2\beta_n) - 10 \cos \alpha - 5 \cos(\alpha - 2\beta_n)), \\
 y_n &= a \sin \alpha + ae_{\text{LISA}} (\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_n - (1 + \cos^2 \alpha) \sin \beta_n) \\
 &\quad + \frac{1}{8} ae_{\text{LISA}}^2 (3 \sin(3\alpha - 2\beta_n) - 10 \sin \alpha + 5 \sin(\alpha - 2\beta_n)), \\
 z_n &= -\sqrt{3} ae_{\text{LISA}} \cos(\alpha - \beta_n) \\
 &\quad + \sqrt{3} ae_{\text{LISA}}^2 (1 + \sin^2(\alpha - \beta_n)).
 \end{aligned} \tag{2-74}$$

$$\alpha(t) = \frac{2\pi}{1\text{year}} t + \kappa, \beta_n = \frac{2\pi}{3}(n-1) + \lambda, \tag{2-75}$$

同样， κ, λ 表征的是 LISA 的初始位置，考虑到 LISA 预期位置在地球后方约 20° 处，则一般取 $\kappa = \kappa_0 - 20 \times \pi/180$ （见图1-3）。轨道半长轴 $a = 1\text{AU}$ ，轨道偏心率则由臂长和轨道半长轴给出： $e_{\text{LISA}} = L/(2\sqrt{3}a)$ 。

太极的轨道与 LISA 类似，只是臂长不同，此外如若考虑太极预期位置在地球前方约 20° 处，则一般取 $\kappa = \kappa_0 + 20 \times \pi/180$ （见图1-3）。

LISA 轨道与天琴轨道的另一点不同在于，天琴探测器虽然绕着地球旋转，但轨道平面指向是固定的，而 LISA 的探测器平面指向并不固定，这也是上文天琴的频域 Michelson 响应解析公式不能适用于 LISA 的原因。在后面的章节我们还会具体讨论这种轨道设计和探测信噪比的相关关系。而对于这里的 TDI 响应公式，可以看到其与探测器轨道无关，通过代入指定时间序列到本段的轨道公式中，再将由轨道信息求出的卫星链路信息代入式(2-58)中，即可相应地求解空间探测器的 TDI 响应。

2.4 本章小结

在这一章中，我们首先从弱场、线性近似下的 Einstein 方程开始，推导了横向无迹规范下平面引力波的具体形式，并在借此阐述引力波理论的基本概念，例如引力波有两种独立的极化模式等。进一步地，我们推导了最低阶近似下双星系统引力波的基本形式以及引力波频率随时间的演化关系。随后，通过调研恒星级双黑洞在不同演化模型下偏心率参数的分布情况，我们发现要区分这些模型，仍然依赖空间

探测器的高灵敏度，因此确定了偏心率作为本课题的主要研究参数。最后，我们着重介绍了引力波波形的构建。我们讨论了当前各类波形模型的分类及其适用范围，依次推导了地面和空间引力波探测器的天线响应函数；特别地，我们针对空间探测器介绍了两种构型下的响应函数公式，特别是 TDI 响应相比 Michelson 构型更加实际和普适；最后，针对 TDI 响应需要考虑的探测器轨道信息，我们进一步探讨了天琴和 LISA 的轨道表达式。接下来，我们将探究引力波数据处理过程中需要用的方法。

第 3 章 引力波数据处理

在完成引力波信号建模后，我们就可以开始着手进行数据处理工作了。首先，我们需要了解各类引力波探测器的噪声特性，这为不同通道下信号的模拟和信噪比的计算提供了基础。然后我们将分别从探测和测量两个角度，详细讨论各自所需的数据处理方法。

3.1 引力波探测器的噪声

地面探测器的噪声曲线 地面探测器的噪声来源，主要有激光噪声、地震噪声、热噪声和引力梯度噪声等。综合多类噪声来源，最终可以得到其用功率谱密度 (power spectral density, PSD) 单位表示的灵敏度曲线。随着技术不断升级，以及对噪声的评估方法的不同，同一探测器有时会有不同的灵敏度曲线，以对应不同的时期或使用场景，如图3-1。地面探测器的灵敏度曲线大多可以从前文提到的 LVK 算法库组件 LALSuite 获取¹。

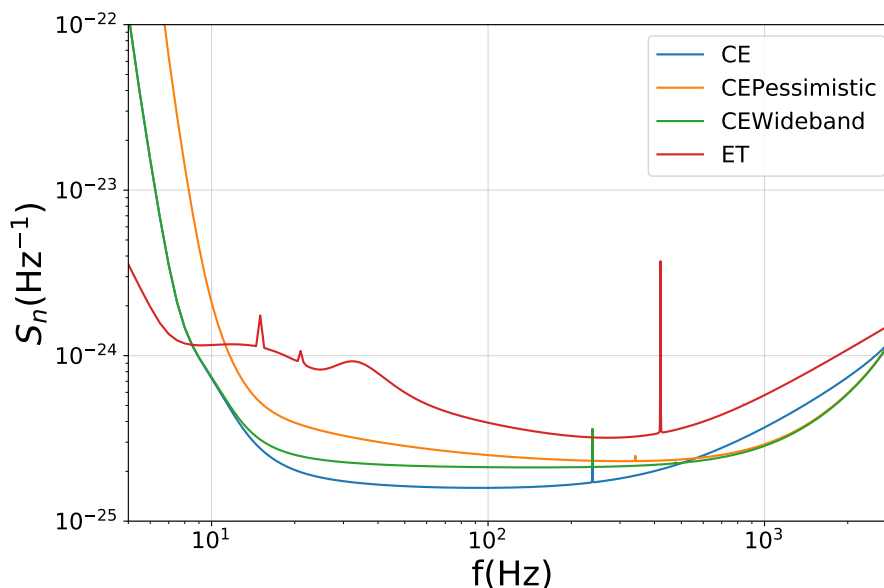


图 3-1 下一代探测器 ET 和 CE 的灵敏度曲线。根据评估方法不同，CE 有三种不同的噪声曲线选取方式。

¹<https://doi.org/10.7935/GT1W-FZ16>

空间探测器的噪声曲线：Michelson 构型 Michelson 构型的空间探测器噪声形式与地面探测器基本相同。但需要注意的是，Michelson 通道的适用条件是低频近似，即 $f \ll f_*$, $f_* = (2\pi L)^{-1}$, L 是探测器臂长。对于 2.5Gm 的 LISA, $f_* \approx 19.09\text{mHz}$ ，对于天琴， $f_* \approx 0.28\text{Hz}$ 。对于超大质量黑洞，其频率演化区间位于 $(10^{-5}, 10^{-1})\text{Hz}$ ，因此 Michelson 通道对该情况适用；而对于 $(10^{-2}, 10^0)\text{Hz}$ 的恒星级双黑洞旋近信号，该通道就不适合实际的引力波探测过程了，但依然可以用作初期的科学目标分析等使用场景。

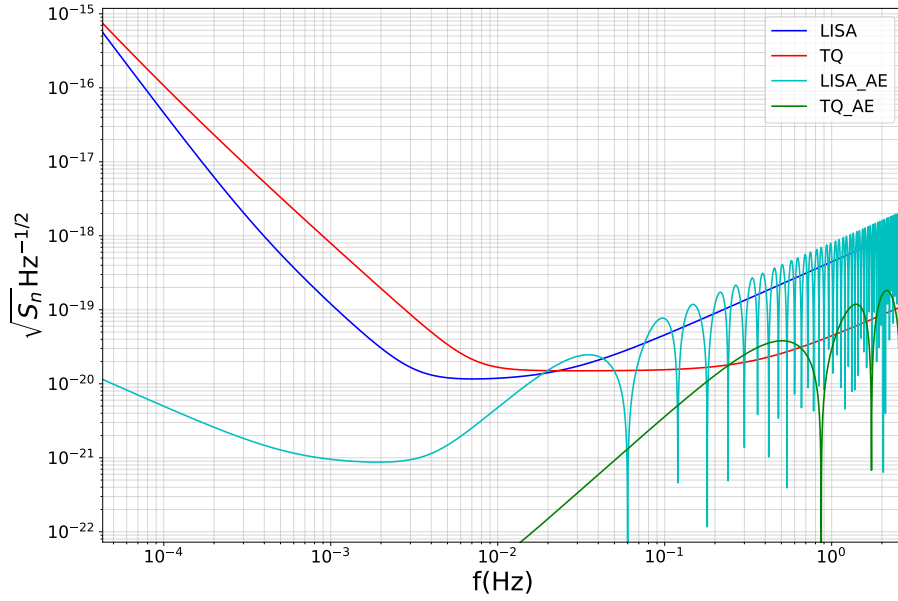


图 3-2 天琴和 LISA 的 Michelson 构型下的灵敏度曲线（均未考虑白矮星前景噪声），以及 TDI 构型下 A(或 E) 通道下的噪声曲线。这里的曲线是用 PSD 的平方根，即振幅谱密度 (ASD) 表示的。

具体地，天琴的噪声 PSD 的表达式为

$$P_n(f) = \frac{1}{L^2} \left[\frac{4S_a}{(2\pi f)^4} \left(1 + \frac{10^{-4}\text{Hz}}{f} \right) + S_x \right], \quad (3-1)$$

其中天琴的臂长取 $L = L^{\text{TQ}} = \sqrt{3} \times 10^6\text{m}$, $S_a^{1/2} = 10^{-15}\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{1/2}$ 为加速度噪声, $S_x^{1/2} = 10^{-12}\text{m} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ 为位置噪声^[28]。通过考虑响应传递函数 (transfer function), 可以得到全天的灵敏度曲线

$$S_n(f) = \frac{P_n(f)}{\mathcal{R}(f)} = \frac{20}{3} \frac{1}{L^2} \left[\frac{4S_a}{(2\pi f)^4} \left(1 + \frac{10^{-4}\text{Hz}}{f} \right) + S_x \right] \cdot \left[1 + 0.6 \left(\frac{f}{f_*} \right)^2 \right]. \quad (3-2)$$

类似地，可以得到 LISA 的灵敏度曲线^[148]

$$S_n^{\text{LISA}}(f) = \frac{10}{3} \frac{1}{L^2} \left[\frac{4S_a^{\text{LISA}}}{(2\pi f)^4} \left(1 + \left(\frac{0.4\text{mHz}}{f} \right)^2 \right) + S_x^{\text{LISA}} \right] \cdot \left[1 + 0.6 \left(\frac{f}{f_*} \right)^2 \right], \quad (3-3)$$

其中 LISA 的臂长取 $L = L^{\text{LISA}} = 2.5\text{Gm}$, $(S_a^{\text{LISA}})^{1/2} = 3 \times 10^{-15}\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{1/2}$ 为 LISA 的加速度噪声, $(S_x^{\text{LISA}})^{1/2} = 1.5 \times 10^{-11}\text{m} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ 为 LISA 的位置噪声。

太极的灵敏度曲线与 LISA 类似, 只是参数选取有所不同: 太极的臂长 $L^{\text{Taiji}} = 3\text{Gm}$, 加速度噪声 $(S_a^{\text{Taiji}})^{1/2} = 3 \times 10^{-15}\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{Hz}^{1/2}$, 位置噪声 $(S_x^{\text{Taiji}})^{1/2} = 8 \times 10^{-12}\text{m} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ ^[149]。

理论上, 大量双白矮星引力波信号会形成前景噪声, 是低频噪声的主要来源之一, 因此需要在噪声曲线上叠加前景噪声^[150-153]。在图3-2中, 我们并未考虑这部分的影响。这是因为该前景噪声主要在 10^{-2}Hz 下的低频部分, 考虑到恒星级黑洞的频率演化范围, 前景噪声基本不会对恒星级双黑洞的数据处理造成影响。

空间探测器的噪声曲线: TDI 构型 上一章我们提到, 为消除不同臂带来的激光相位噪声, 人们提出了时间延迟干涉方法。该方法通过构造特定的干涉臂组合, 实现了虚拟等臂干涉仪的效果。TDI 构型 X, Y, Z 通道噪声的具体形式由下式给出

$$\begin{aligned} S_X &= 16 \sin^2(\omega L) [S^{\text{IMS}} + 2(1 + \cos^2(\omega L))S^{\text{Acc}}], \\ S_{XY} &= -8 \sin^2(\omega L) \cos(\omega L) (S^{\text{IMS}} + 4S^{\text{Acc}}), \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中 S_{XY} 是 X 与 Y 通道的交叉谱密度 (Cross Spectral Density, CSD)。其他通道 (Y, Z) 的 PSD 以及通道间的 CSD 与上式相同。对于天琴, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{S^{\text{oms}}}(f) &= \sqrt{S_x} \frac{2\pi f}{c}, \\ \sqrt{S^{\text{acc}}}(f) &= \frac{\sqrt{S_x}}{2\pi f c} \sqrt{1 + \frac{0.1\text{mHz}}{f}}, \end{aligned} \quad (3-5)$$

这里为了标明量纲, 已将 $S^{\text{Acc}}, S^{\text{IMS}}$ 中的光速 c 写明。对于 LISA 和太极, 有^[151]

$$\begin{aligned} \sqrt{S^{\text{IMS}}}(f) &= \sqrt{S_x} \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{2\text{mHz}}{f} \right)^4}, \\ \sqrt{S^{\text{Acc}}}(f) &= \frac{\sqrt{S_a}}{2\pi f c} \sqrt{1 + \left(\frac{0.4\text{mHz}}{f} \right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{8\text{mHz}} \right)}. \end{aligned} \quad (3-6)$$

通过代入对应探测器的臂长、加速度噪声和位置噪声参数，即可以得到不同探测器的噪声曲线。

X, Y, Z 通道存在 CSD 的原因是通道之间存在相关性，而上文提到 A, E, T 通道是 X, Y, Z 通道的正交线性变换，因此通道内的噪声相互正交，噪声的具体形式由下式给出^[90]

$$\begin{aligned} S_A = S_E &= 8 \sin^2 \omega L \left[4 (1 + \cos \omega L + \cos^2 \omega L) S^{Acc} + (2 + \cos \omega L) S^{IMS} \right], \\ S_T &= 32 \sin^2 \omega L \sin^2 \frac{\omega L}{2} \left[4 \sin^2 \frac{\omega L}{2} S^{Acc} + S^{IMS} \right]. \end{aligned} \quad (3-7)$$

作为示例，天琴和 LISA 在 TDI-A（或 E）通道下的噪声曲线如图3-2所示。

3.2 引力波信号的探测

引力波数据处理流水线中首先需要实现的是引力波信号的探测，其目的是从探测器的噪声背景中识别并提取出引力波信号。完整的探测过程需要考虑引力波探测器的噪声特性、信号的预处理、信号与波形模板的匹配、信号显著性分析与一致性检验等，而其中的关键环节就是信号匹配。

3.2.1 匹配滤波

所谓信号匹配，是指用匹配滤波技术探测引力波信号的过程，这种技术被广泛应用于恒星级双黑洞这种啁啾信号源的探测上^[154]。匹配滤波需要使用已知的波形模板与未知信号做匹配，求解二者的相关程度，以判定信号中是否有模板波形存在，因此需要不断更换参数组合，也就是不断更换模板，直到找到尽可能接近信号的波形。显然，只有信号与模板完全相同时，得到的结果是最优的，这时有

$$\rho_{\text{opt}}^2 = (h|h), \quad (3-8)$$

ρ_{opt} 被称为最优信噪比，其中

$$(h|g) \equiv 4\Re \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{g}^*(f)\tilde{h}(f)}{S_n(f)} df \quad (3-9)$$

是 g 和 h 的内积^[155]， $S_n(f)$ 是探测器噪声的功率谱密度。 $\tilde{h}(f) = \tilde{h}(f, \lambda^\mu)$ 是时域波形 $h(t)$ 的 Fourier 变换， λ^μ 代表决定波形的一系列参数。对于恒星级双黑洞，地

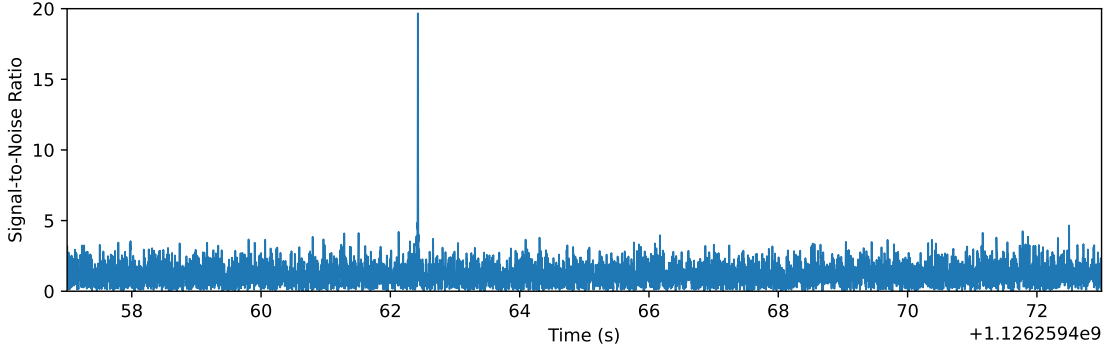


图 3-3 以 GW150914 为例，通过匹配滤波在数据中寻找与模板对应的信号，只有模板与信号的并合时间 t_c 非常相近时，匹配滤波才会得到非常显著的信噪比结果。

面探测器通常选取的全空间参数为

$$\lambda^\mu = (\mathcal{M}, \eta, \vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2, D_L, t_c, \phi_c, \iota, \alpha, \delta, \psi),$$

共 15 个参数。其中 $\mathcal{M}$ 和 η 是啁啾质量和对称质量比，由组分质量 (m_1, m_2) ($m_1 > m_2$) 给出， D_L 是光度距离 (luminosity distance)， t_c, ϕ_c 是并合时间和并合相位， ι 是倾向角， (α, δ) 是赤经和赤纬，是在赤道坐标系下用来描述源空间方位的参数， ψ 是极化角。对于空间探测器，则一般使用黄经黄纬 (λ, β) 来描述源的空间方位。

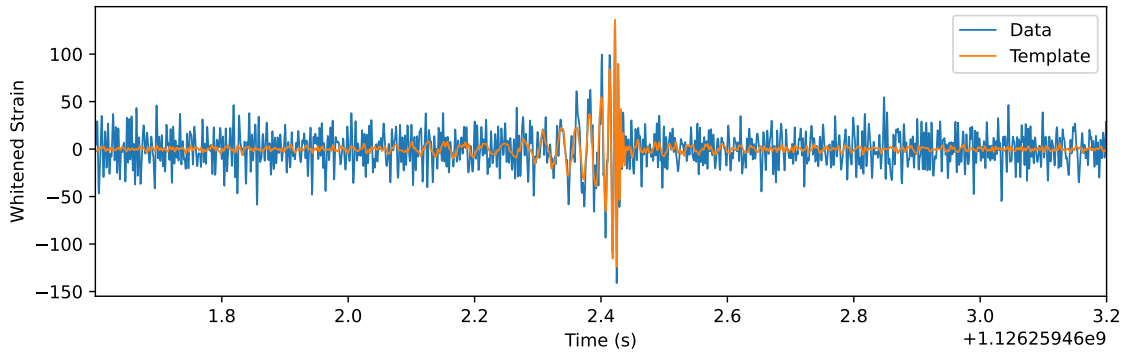


图 3-4 同图3-3，示例引力波事件的数据与最高信噪比时的引力波波形模板相匹配，图中数据已经过白化等预处理。实际探测过程中我们无法预知该引力波信号的物理参数，因此需要生成一整个波形模板库来与之匹配。

为了使参数空间中任意位置的参数组合对应的信号都有足够相近的波形模板与之匹配，匹配滤波需要构建相应的波形模板库。模板库中的模板往往不能完美地匹配实际的引力波信号，匹配因子 (fitting factor, FF) 可以用来描述一个波形在给

定模板库情况下可以达到的最佳匹配程度:^[156]

$$FF(\lambda^\mu) \equiv \max_{\lambda^{\mu'}} \frac{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^{\mu'}))}{\sqrt{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^\mu))(h(\lambda^{\mu'})|h(\lambda^{\mu'}))}}. \quad (3-10)$$

那么，对于一个足够有效的模板库，其参数空间内的任意引力波信号都应该满足 $FF \geq M$ ，其中 M 是可以容忍的最小匹配程度 (minimal match)，一般取 $M = 0.97$ ，其对应的含义是探测能力损失约 10%²。

3.2.2 波形模板库

实际的探测过程往往伴随着探测器的噪声背景，而且引力波信号的强度又远小于这些噪声，这意味着我们需要相对准确的噪声模型和波形模型。同时我们还需要构建一个波形模板库，其中的波形模板需要足够多才能覆盖整个参数空间，但模板数过多会消耗大量的计算资源（如图3-5）。因此，如何针对不同引力波探测器构建合适的波形模板库将是本课题的核心工作之一。

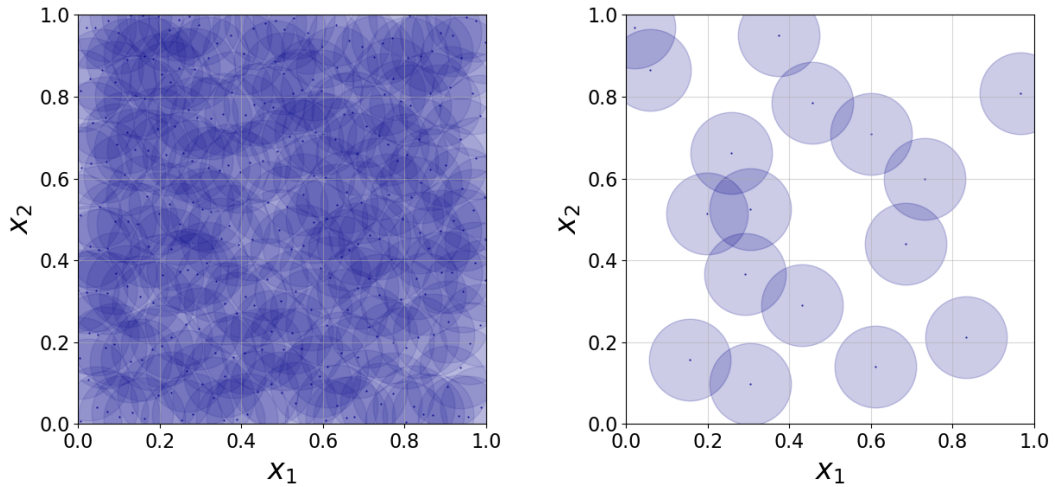


图 3-5 模板库中模板的数量太多或太少都是不合适的

本质上，我们要在给定最小匹配程度的情况下，用较少的模板覆盖尽可能多的参数空间——数学上这是一个经典的覆盖问题 (The Covering Problem)，其目的是寻找厚度最小的覆盖方案。所谓厚度 (thickness)，是指一个用于覆盖的 N 维球的

²由于探测距离与信噪比成正比，信噪比降低到理想值的 97%，则有效探测体积为降低为原来的 $0.97^3 \approx 0.91$ ，即对应探测能力损失约 10%。

体积与对应的 N 维基本格子的体积的比：

$$\Theta \equiv \frac{V_n R^n}{\text{vol}(\Lambda)} \geq 1, \quad (3-11)$$

其中 $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ 为 N 维单位球体积。例如图3-6中正方形网格对应 $\Theta = \pi/2$ ，而六边形网格对应 $\Theta = 2\pi/3\sqrt{3}$ ，因此六边形网格的覆盖更“薄”。事实上，该六边形网格的覆盖方式就是二维欧式空间下的最优覆盖。^[157]

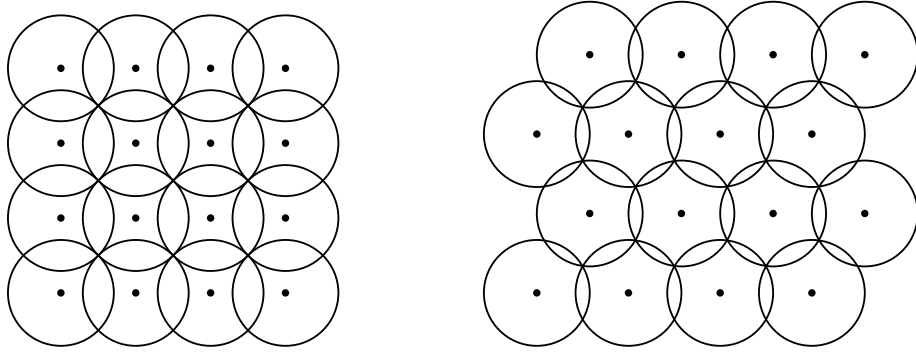


图 3-6 二维欧式空间的覆盖问题。可见六边形比正方形网格排布效果更好。

而对于引力波探测而言，我们面临的问题并没有这么简单。一方面，引力波探测需要考虑的参数空间不止二维，更重要的是，引力波参数空间，特别是其对应的内积空间是非欧的，其度规非常复杂^[158, 159]。

不过，我们的目标是生成较小的模板库，而不是寻找最小的模板库，因此目前的模板库生成程序更多是基于随机模板放置算法。然而，目前这些程序包都是针对地面探测器的模板库生成的。如 `PyCBC` 中涉及模板库生成的程序，为了提高计算效率，将使用模板波形做匹配的流程进一步简化^[160]，同时由于未使用实际的引力波波形，该程序也相应地存在局限性。因此使用实际波形来计算的模板库生成算法扩展性更强，例如最近 Kacanja 等人提出的使用内积不等式方法来加速随机模板的生成等^[161]。

`sbank`³ 是由 Ian Harry 等人开发的基于随机模板放置算法生成波形模板库的程序包^[162–164]。该程序同样使用了实际波形来生成模板库，其整体结构如图3-7所示。整个程序包主要包含以下六个部分：

- **sbank**: 主入口模块，用户运行此模块即可生成并保存模板库，同时将参数配置传递给其他模块；

³<https://github.com/gwastro/sbank>

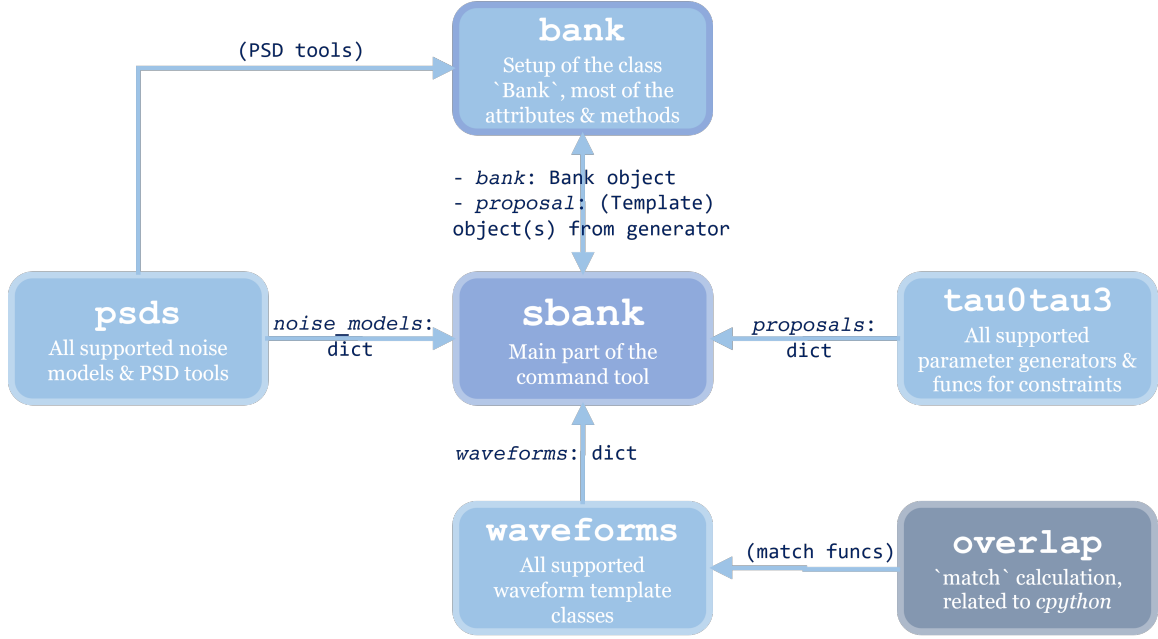


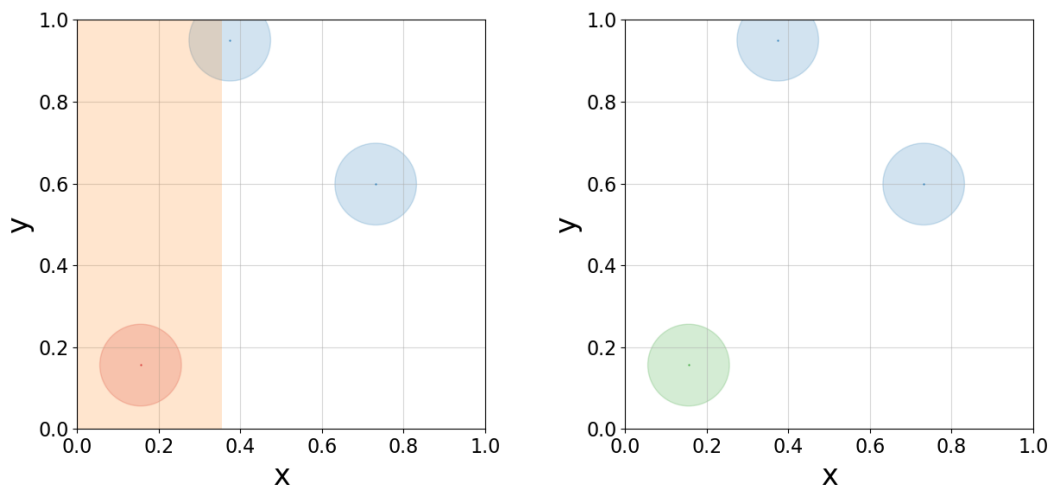
图 3-7 sbank 程序包结构示意图，详见正文。

- **bank**: 负责管理模板库，通过设定的规则检查新候选模板是否与库中已有的任何模板邻近，从而决定是否将这个新模板加入库中；
- **psds**: 提供调用各类引力波探测器 PSD 的方法和相关计算工具；
- **tau0tau3**: 内含生成候选模板参数的工具，这里的 τ_0, τ_3 是 **sbank** 对引力波信号中质量和起始频率参数的重新参数化，这样做的好处是可以相对更均匀地在内积空间上采样；
- **waveforms**: 存储各类波形模型及其调用或计算方法（包括信号预处理等），供模板生成时调用；
- **overlap**: 通过 `cpython` 代码加速计算模板之间的匹配度，与主 `Python` 代码有所区别。

接下来我们将通过一个简化的二维欧式空间的例子，简述 **sbank** 中模板库生成的算法逻辑。在二维欧式空间，判断两个模板之间是否足够接近，计算的是两点之间的距离，即 $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ 。需要注意，在实际引力波探测中，判断两个模板之间是否足够接近，计算的是两个模板的 Overlap：

$$O(h(\lambda^\mu), h(\lambda^{\mu'})) \equiv \frac{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^{\mu'}))}{\sqrt{(h(\lambda^\mu)|h(\lambda^\mu))(h(\lambda^{\mu'})|h(\lambda^{\mu'}))}}. \quad (3-12)$$

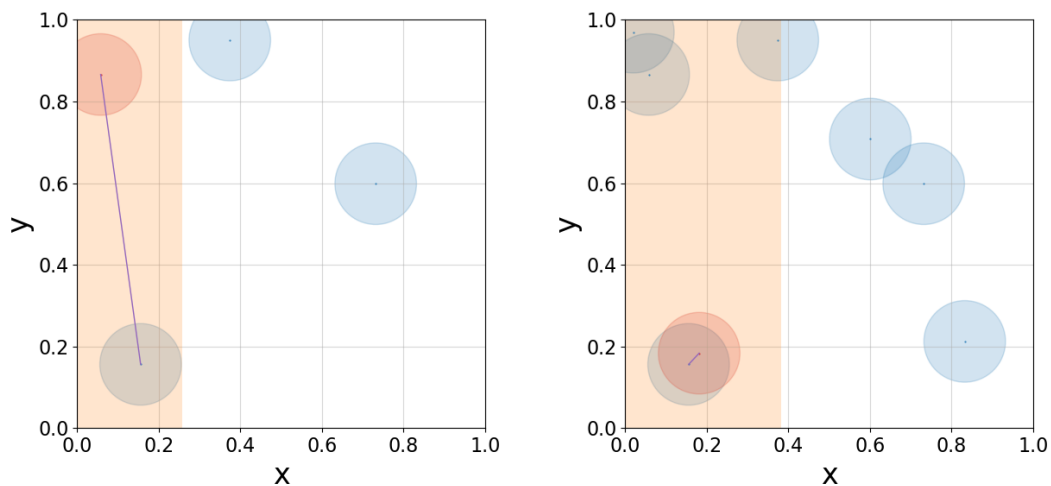
匹配因子 FF 事实上就是整个模板库的模板与某个信号间的 Overlap 的最大值。



(a) 候选模板开始注入到模板库中

(b) 候选模板的邻域内没有模板，因此直接被接受成为新模板嵌入到模板库中

图 3-8 模板库生成过程。蓝色点代表模板库已有模板，红色点代表当前候选模板，绿色点代表该候选模板被接受成为新模板。浅橙色代表的区间为红色点的邻域范围。点周围的圆形范围最外圈代表该模板库允许的模板间最远距离，对应到实际引力波探测则为最小匹配程度 $M = 0.97$ 。



(a) 邻域内的唯一一个模板与候选模板距离远，(b) 邻域内的一个模板与候选模板距离过近，该候选模板将被接受成为新模板，无需再计算其 候选模板将直接被排除，无需再计算其与其他与邻域外模板的距离 邻域内模板的距离

图 3-9 模板库生成过程。在二维欧式空间通过两点间距来决定模板的去留，而实际引力波探测中需要计算模板间的 Overlap。

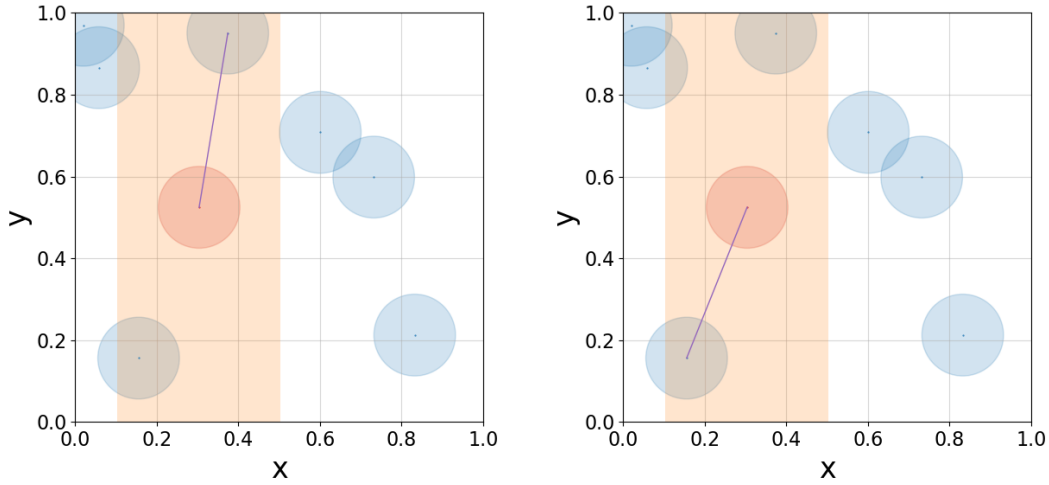


图 3-10 模板库生成过程。基于邻域参数排序后，与候选模板的邻域参数最相近的模板将首先计算距离。

生成模板库时，每当一个新的候选模板加入进来，需要判断其与当前模板库中所有模板的距离——这样的做法显然是低效的，在实际引力波探测中，主要的计算消耗就是在计算波形以及 *Overlap*。因此，在程序中，我们指定了邻域参数 (*nhood_param*) 和邻域大小 (*nhood_size*) 这两个参数，即使用哪个参数作为邻域的判据及其邻域大小。这样我们事先排除了很多与候选模板相去甚远的模板，因此只需要计算候选模板与其邻域里的模板的距离即可，如图3-8和图3-9所示。

这样的处理还有一个好处，即我们可以根据邻域参数对模板进行排序，新模板可以直接嵌入到与其邻域参数的大小最接近的两个模板之间。此外，在筛选好邻域内的模板后，同样可以对这些模板排序，与候选模板的邻域参数最相近的首先计算。由于邻域参数更相近，这个模板有更大概率与候选模板距离近，进而把候选模板排除，进而提高筛选效率（如图3-9(b)和图3-10）⁴。

我们这里邻域参数选的是横轴 x 的值，邻域大小为 0.2，从以上一系列图中可以看到，这似乎并不算是一个明智的选取，邻域的范围仍然比较大。然而，这是因为我们很清楚欧式空间的度规形式，因此可以直观判断距离相近与否。而在实际引力波探测中，我们使用的是只由啁啾质量（和起始频率）决定的一个时间量纲的参数 τ_0 。虽然我们不清楚实际参数空间的结构，但可以确定的是，啁啾质量是引力波

⁴假设最终接受的模板数为 N ，而提议的模板数为 P ，且 $P \gg N$ ，则有：不做任何优化时每个提议模板需与所有 N 个模板匹配，总复杂度约为 $O(P \times N)$ ；引入邻域参数后只需与邻域内 K ($K \ll N$) 个模板匹配，总复杂度约为 $O(P \times K)$ ；排序以后大多数提议模板仅需极少次匹配即可被排除，总复杂度可降至接近 $O(P \times 1)$ 。

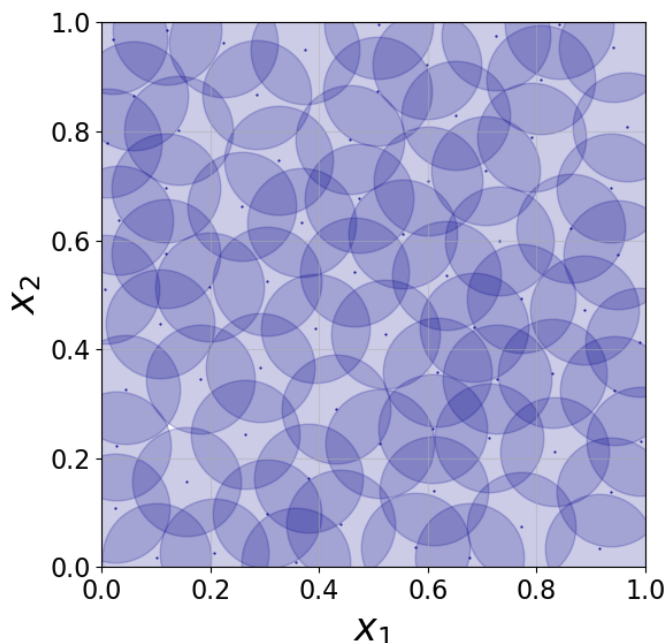


图 3-11 简单二维欧式空间示例下的模板库生成结果，可见模板库以相对较少的模板数量基本覆盖了给定的参数空间。

的主导参数⁵，因此这样的选取是合理的。在简化模型中，我们保留了这样的单参数作为邻域参数的配置以做演示。最终这个示例模板库的大小为 74，与最优覆盖 (~ 49) 的结果相近，如图3-11所示。如果考虑更高维的空间，这样的算法比在二维情况下还要更具优势。

3.3 引力波信号的测量

在探测到恒星级双黑洞的引力波信号以后，就需要开始对信号进行精确测量，其主要可以分为参数估计和模型选择两部分。参数估计即从已知的数据中提取系统的物理参数，模型选择则是根据已知的数据对不同模型的支持程度来区分它们的优劣，本课题将关注参数估计这部分。

根据使用场景的不同，引力波信号的参数估计方法主要分为 Fisher 信息矩阵 (Fisher Information Matrix, FIM) 和贝叶斯推断：在没有实际探测数据时，通常可以用半解析的 Fisher 信息矩阵方法快速估算参数估计精度；而有了实际数据或模拟真实数据后，则一般会采用更费时但更可靠的贝叶斯推断，贝叶斯推断可以给出

⁵例如，在生成图3-3的过程中，我们在生成模板波形时不仅只输入了双星质量参数，其他的值都被缺省了，甚至还假设双星质量相等，但我们依然得到了非常显著的信噪比结果。

对应参数的后验概率分布，适合引力波信号探测之后实际对信号的高精度参数估计测量，现已广泛应用于引力波的信号测量领域。本节将分别介绍这两种方法。

3.3.1 Fisher 信息矩阵

FIM 可以用来估计引力波参数的不确定度范围，FIM 的具体定义为^[165, 166]

$$\Gamma_{ij} = \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda^i} \middle| \frac{\partial h}{\partial \lambda^j} \right), \quad (3-13)$$

对于多探测器组成的探测网络，总的 FIM 写为

$$\Gamma_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k. \quad (3-14)$$

在稳态 Gaussian 噪声假设下，协方差矩阵可以由 FIM 给出估计，即 $\Sigma = \Gamma^{-1}$ ，那么参数不确定度范围将由协方差矩阵对角元的平方根给出，即

$$\sigma_{\lambda^i} = \sqrt{\Sigma_{ii}}. \quad (3-15)$$

特别地，对于空间定位精度，有^[167]

$$\sigma_{\Omega} = 2\pi |\sin \theta| (\Sigma_{\theta\theta} \Sigma_{\phi\phi} - \Sigma_{\theta\phi}^2)^{1/2}.$$

FIM 也可以用来对模型模板库大小进行理论上的大致估计。考虑参数空间 Ω 中两个相距非常近的距离，有

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\lambda^\mu d\lambda^\nu, \quad (3-16)$$

其中

$$g_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial \lambda^\mu} \middle| \frac{\partial \hat{h}}{\partial \lambda^\nu} \right) = \hat{\Gamma}_{\mu\nu} \quad (3-17)$$

是参数空间的度规。 $\hat{h}$ 代表一个归一化的信号，即 $(\hat{h}|\hat{h}) = 1$ 。事实上，上一节讨论的匹配因子和 Overlap 的表达形式，需要求解的就是归一化模板之间的内积。考虑参数空间模板数的疏密程度，则有 $ds^2 \geq 1 - M$ ， M 是最小匹配程度。单个模板在 N 维空间所占的最大本征体积可以表示为 $dV = (1 - M)^{N/2}$ ，那么在方格子放置模

板的条件下最小的模板数量由总的本征体积和单个模板体积的商给出，即^[168, 169]

$$N_T = \frac{1}{(2\sqrt{(1-M)/N})^N} \int_{\Omega(\lambda)} \sqrt{\det \hat{\Gamma}_{\mu\nu}} d\lambda, \quad (3-18)$$

FIM 给出的估计是不基于实际数据的估计，在计算 FIM 时，代入的系列参数 λ^μ 被认为与真实源参数足够接近的，因此该估计方法只能给出不确定度范围。但该方法的优势正在于此，由于不需要实际数据，在探测器尚未投入运行时就可以给出其预期对各个参数的探测能力，因此非常适合初期的科学分析。

3.3.2 贝叶斯推断

贝叶斯方法基于贝叶斯定理，用于分析在拥有更多新的信息的情况下，计算一个新假设成立的概率。贝叶斯定理描述了随机事件的条件概率分布的关系：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (3-19)$$

其中 $P(A|B)$ 是指在 B 事件发生的情况下 A 事件发生的可能性，也称为在假设 B 已经发生的情况下 A 的后验概率 (posterior)； $P(A)$ 是事件 A 在不考虑 B 的因素的发生概率，即先验概率 (prior)； $P(B)$ 为归一化常量 (normalized constant) 或贝叶斯证据 (evidence)； $P(B|A)$ 是假设 A 发生的情况下 B 发生的概率，也叫似然函数 (likelihood function)。

具体到引力波数据处理中的贝叶斯推断，上式可以写为

$$P(\lambda_i|D, I) = \frac{P(D|\lambda_i, I) P(\lambda_i|I)}{P(D|I)}, \quad (3-20)$$

其中

$$P(D|I) = \int P(D|\lambda_i, I) P(\lambda_i|I) d\lambda_i. \quad (3-21)$$

其中 $P(\lambda_i|D, I)$ 为在已知先验信息 I 和数据 D 的情况下，参数 λ_i 的后验概率 (posterior) 分布； $P(\lambda_i|I)$ 是参数 λ_i 的先验概率 (prior)，通常由参数在模型中的先验信息给出； $P(D|\lambda_i, I)$ 为似然函数 (likelihood function)，是现有参数 λ_i 确定，先验信息 I 成立的情况下，得到数据 D 的概率，似然函数也经常用字母 $\mathcal{L}$ 来表示； $P(D|I)$ 是归一化常数，也被称为贝叶斯证据 (evidence)，即确保后验概率归一化： $\sum_i P(\lambda_i|D, I) = 1$ ，贝叶斯证据也常用 Z 来表示。

在实际的引力波探测过程中，波形所需要的一部分参数是我们所不关心的。例

如，针对双黑洞系统的引力波信号，往往并不关心其并合时的相位。在贝叶斯推断过程中，可以对这些冗余参数做边缘化 (marginalization)，即

$$P(\psi_i|D, I) = \int P(\psi_i, \phi_i|D, I) d\phi_i, \quad (3-22)$$

其中 (ψ_i, ϕ_i) 分别是 λ_i 中的非冗余参数和冗余参数。

由此可以看到，在贝叶斯推断中，预期得到的参数估计结果就是参数的后验概率。而这个概率正比于似然函数与先验概率的乘积，即

$$P(\lambda_i|D, I) \propto P(D|\lambda_i, I) P(\lambda_i|I), \quad (3-23)$$

因此引力波信号参数估计关键在于如何合理设计似然函数。此外，由于似然函数本身的复杂性和高维参数空间造成的搜索困难，和引力波探测类似，如何在测量恒星级双黑洞引力波信号时获得预期结果的同时兼顾计算效率，也是本课题需要实现的一部分。

3.3.2.1 似然函数

先验概率取决于已知信息和参数的物理范围，接下来我们考虑似然函数的形式。首先考虑数据 D 为总时长为 T 的离散数据点，时间间隔为 $\Delta t = T/(N-1)$ 。在 Gaussian 噪声假设下，考虑只含噪声的数据，即 $D(t) = n(t)$ ，其概率密度可描述为

$$P(D|\mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(D - \mu)^T \Sigma^{-1}(D - \mu)\right), \quad (3-24)$$

其中 (μ, Σ) 分别为其期望值和方差-协方差矩阵， $\Sigma_{ij} = R((i-j)\Delta t)$ ， $R(\tau)$ 为噪声自相关函数。进一步地，假设噪声是稳态的，则期望值为常数，可不失普适性地假设 $\mu = 0$ ，则

$$P(D|\mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N D_j \Sigma_{jk}^{-1} D_k\right), \quad (3-25)$$

该似然函数可以写成内积的形式，即

$$P(D|\mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Sigma|^{\frac{1}{2}}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(D|D)\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(D|D)\right]. \quad (3-26)$$

那么考虑数据中同时含有引力波信号和噪声，即 $D(t) = h(t, \lambda) + n(t)$ ，此时的似然函数

$$\begin{aligned} P(D|\lambda_i, I) &\propto \exp \left[-\frac{1}{2} (D - h(\lambda)|D - h(\lambda)) \right] \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(D|D) + (h(\lambda)|h(\lambda)) - 2(h(\lambda)|D)] \right\}, \end{aligned} \quad (3-27)$$

这便是稳态 Gaussian 噪声假设下似然函数的形式。

在实际的参数估计过程中，往往会对基本的 Gaussian 噪声模型进行速度上的优化，例如外差似然估计 (heterodyning, 或称 relative binning)^[170-172]，其基本思路是将引力波信号分为快速变化的部分和缓慢变化的部分。该方法基于波形的振幅相位随频率是缓变的这一基本假设。取一组参数，其对应的波形为基准波形 $h_0(f)$ ，另将频率区间合理分段，那么实际波形与基准波形的比值可以写为

$$r(f) = \frac{h(f)}{h_0(f)} = r_0(h, b) + r_1(h, b)(f - f_m(b)) + \cdots, \quad (3-28)$$

考虑到这个比值是缓变的，这里只需做线性项展开， $f_m(b)$ 代表这一小段的中心频率。因此，可以在计算过程中只计算一次基准波形，而用更稀疏的频率序列生成实际波形 $h(f)$ ，对于未取到的频率点处波形的值，则可以通过对 $r(f)$ 的插值快速求得，大大加速了似然函数的计算。特别是考虑空间探测器观测时间长，需要处理的数据往往在几个月到几年的时间跨度，这种方法目前已经广泛运用到大质量双黑洞引力波信号的数据处理中^[173-175]。

3.3.2.2 随机采样算法

理论上在得到似然函数的形式以后，我们就可以在全参数空间中计算并获得后验概率分布了。然而和引力波的探测类似，复杂且高维的参数空间会使得计算成本陡然增加——例如考虑在参数空间均匀划分网格，即每个维度 10 个点，那么 N 维空间需要计算似然函数的点就是 10^N 个。因此实际的参数估计过程需要其他的采样方法，其中最典型的两种随机采样方法为 Markov 链蒙特卡洛方法 (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 和层级采样方法 (Nested sampling)。

MCMC 所谓 Markov 链，它的特点是新采样点的位置总是取决于上一个采样点的位置。MCMC 在 Markov 链上通过蒙特卡洛随机游走来引导采样，最终达到生成的样本在参数空间的概率分布正比于后验概率的效果。

MCMC 最经典的实现算法是 Metropolis-Hastings 算法^[176, 177]。在这个算法中，

新采样点的位置 x' 由提议分布函数 (proposal distribution) $q(x'|x)$ 来决定, 其中 x 为当前的起始点。定义新采样点的接受概率

$$\alpha(x, x') = \min(1, r), \quad (3-29)$$

其中

$$r \equiv \frac{P(x'|D, I) q(x|x')}{P(x|D, I) q(x'|x)} \quad (3-30)$$

为 Metropolis 比。即当 $r \geq 1$ 时, 新采样点直接被接受; 否则将以 r 的概率接受新采样点, 如未接受则保持当前状态 x 。可以证明, 这样的策略满足细致平衡条件

$$P(x_i)q(x_{i-1}|x_i) = P(x_{i-1})q(x_i|x_{i-1}), \quad (3-31)$$

其物理含义在于, 在任意时刻, 从状态 x_i 转移到状态 x_{i-1} 的总转移概率要和从状态 x_{i-1} 转移到状态 x_i 的总转移概率相同。这是 MCMC 收敛的充分条件。

有了这样的判定策略, 使得 MCMC 既可以探索给定的参数空间, 又可以确保收敛。理论上, 可以从先验概率给定的参数空间中任意一点开始采样。然而, 随机选取的起始点大概率会处于后验概率很低的地方, 随着 Markov 链经历一定次数的迭代以后, 起点所造成的偏差才逐渐变得忽略不计——我们把这个过程称为 burn-in, 在实际的采样过程中, 我们会把前面这部分的采样丢弃, 以得到更加可靠的结果。

在经典 MCMC 算法的基础上, 人们针对其存在的局限性也提出了许多改进策略。其中一个典型的问题是后验分布的多峰问题: 即每个峰值都可能与数据有很好的吻合, 或者存在一些显著的局域最优解, 这使得传统的 Metropolis-Hastings 算法容易陷入局部最优区域而难以跳出。为了解决这一问题, 并行回火 (Parallel Tempering) MCMC 方法被提出, 这种方法通过多条链同时采样, 并在不同链之间存在信息交换, 以促进对全局空间的探索^[178]。此外, 还有其他类型的 MCMC 方法被陆续提出, 例如仿射不变 (Affine Invariant) MCMC 采样^[179], 基于此算法的程序包 `emcee` 现已广泛应用于天文学领域^[180]。

层级采样 上文提到, 虽然 MCMC 已被广泛应用且算法成熟, 但其自身特性导致在处理后验分布多峰问题上仍然存在局限性。此外, MCMC 通常难以直接估计贝叶斯证据, 而贝叶斯证据在信号测量中的模型选择环节具有关键作用。因此, 层级采样方法被提出^[181, 182]。其基本思想是把式(3-21)这样的高维积分转换成为一维的积分问题, 通过逐步缩小“先验质量”来估计证据, 同时获得后验概率对应的样本。因为这种方法在计算贝叶斯证据的同时, 还会采样出后验概率分布, 所以也

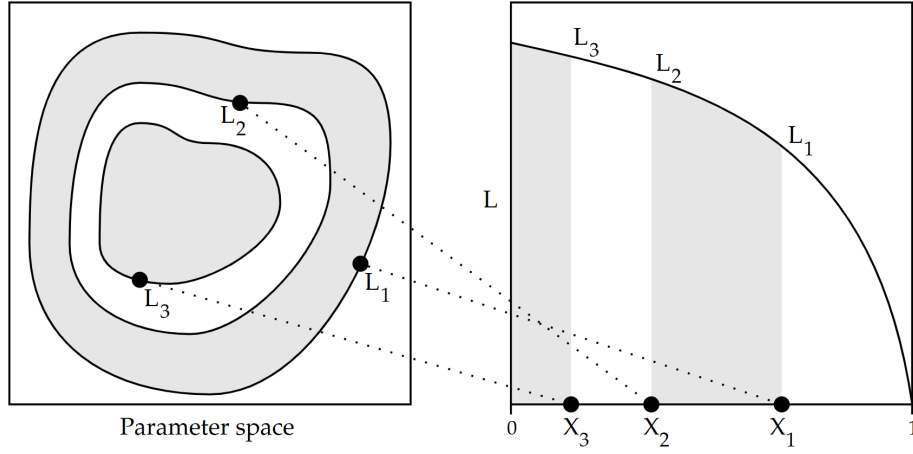


图 3-12 示例似然函数等高线及其对应的先验质量^[182]，贝叶斯证据的值就是右图中似然函数和先验质量组成的面积。

可以用来做参数估计。

所谓先验质量，就是似然函数 L 大于某一阈值情况下的全部参数空间的先验概率积分，即

$$X(L_0) = \int_{L > L_0} P(\lambda_i | I) d\lambda_i. \quad (3-32)$$

那么贝叶斯证据就可以表示成关于 X 的一维积分

$$Z = \int_0^1 L(X) dX. \quad (3-33)$$

实际计算过程中，需要首先选取 n 个活跃点 (live point)，这其中似然函数值最小的定义为第一个采样点，这一个点将被剔除，这个点将被一个后验概率值比该点高的点替换。如此循环以后，采样点将逐渐向高似然函数处聚集，同时很自然地有 $X_1 > X_2 > \dots > X_N$ ，则贝叶斯证据可以通过

$$Z \approx \sum_{i=2}^N L_i (X_i - X_{i-1}) \quad (3-34)$$

估算出来，后验概率分布也可以从一系列采样点的信息中获取出来。

在科学计算上，典型的层级采样程序包有 `dynesty` 等^[183]。此外，层级采样也存在其他一些变体。例如，采样点在更新时，理论上需要在先验质量上随机选取，但随着活跃点的集中，这样的选取效率会变得越来越低。因此有人提出 `multinest` 算法，通过重要性采样 (Importance nested sampling) 的方法，将采样空间改为基于活

跃点的近似后验概率分布空间，从而提高采样效率^[184]。进一步地，Michael Williams 等人通过使用归一化流 (Normalizing Flow) 的方法，用机器学习的方式使得程序可以在高维的似然函数等高线，以及形状更复杂的情况下有更高效且均匀的采样，该算法已对应在 `nessai` 程序包中实现^[185, 186]。

3.4 本章小结

在这一章中，我们系统介绍了引力波的数据处理方法。首先，我们介绍了不同引力波探测器的噪声特性，除了地面引力波探测器噪声的获取方式以外，我们着重介绍了 Michelson 和 TDI 两种构型下，空间引力波探测器噪声的 PSD 的具体形式。随后，我们从探测和测量两个角度，详细介绍了数据处理中需要用到的各种方法。首先是引力波的探测，对于恒星级黑洞这样的啁啾信号，通常使用的是匹配滤波方法。我们具体介绍了匹配因子和波形模板库的概念，还介绍了生成模板库的方式和其中存在的困难，并且通过简单二维欧式空间的示例，详细推演了如何通过随机模板放置算法来构建波形模板库。最后是引力波的测量，由于本课题不涉及模型选择的内容，我们主要讨论了测量中参数估计的方法。我们简要介绍了 Fisher 信息矩阵及其应用，然后具体展开了如何通过贝叶斯推断获得后验概率，以获得参数的测量结果。在贝叶斯推断的介绍中，我们还展开介绍了稳态 Gaussian 噪声假设下似然函数的构建及其优化方法，以及在计算过程中所需的不同类型的随机采样算法。接下来我们将应用以上两章提到的方法与信息，实际开展引力波的模拟与数据处理过程。

第 4 章 空间引力波探测器数据模拟

引力波探测流水线建立的前提是对引力波的系统性模拟，也就是成熟的引力波模拟软件。目前地面探测器方面已经有前文提到的 LALSuite (LVK Algorithm Library Suite)，系统性地包含了从多种引力波源的波形生成，多个地面探测器的响应计算与噪声生成，到多种波源的探测与测量分析代码库。空间探测器方面，LISA 从 2006 年开始先后发布了几轮模拟数据挑战 (Mock LISA Data Challenge, MLDC)^[187]，但这时的模拟数据尚未包含恒星级双黑洞这类波源，直到 2019 年的新 LISA 数据挑战 (LISA Data Challenge, LDC)^[91]。随后，太极计划也公布了对应的模拟数据挑战^[188]。而在本课题之前，天琴尚未有公布其对应的数据模拟软件。此外，不同探测器各自在计算上的约定往往也略有不同，在数据处理时不利于多探测器联合观测场景下分析结果的判断。因此，适用于多个空间引力波探测计划的数据模拟软件的制作，也是本课题的主要工作之一。

上文提到，空间引力波探测由于信号持续时间长，需要考虑随时间变化的天线响应函数。而对于 TDI 构型下的天线响应，如若考虑频域下的响应函数公式，针对不同的自旋权重球谐函数谐频，需要分别展开计算响应以后再叠加。这是因为基于稳相近似的假设下的推广，不同自旋权重球谐函数谐频有不同的等效时频关系。

然而本课题考虑的带偏心率的波形同样存在谐频，但与上文不同的是，这是一种特有的偏心率谐频（如图4-1）。具体地，对于带偏心率的解析的引力波波形，通常的主要思路是将引力波分解成很多个平均轨道频率的谐频信号的叠加。即对于不同的偏心率谐频，有平均轨道频率 F 和 Fourier 频率 f 的关系

$$f = j \cdot F(t_j^*), \quad (4-1)$$

为了区分偏心率谐频和上文提到的自旋权重球谐函数的谐频，这里使用 j 作为谐频的指标， t_j^* 是第 j 项偏心率谐频的稳定时间 (“stationary” time)^[137]。可以看到，无偏心率波形与 TDI 响应的对应关系并不能直接适用该情况。因此，我们需要在理论上重写适用于含偏心率波形的 TDI 响应，在代码实现上增改源生成波形的代码，以适应空间探测器情形下拆分谐频的需求。

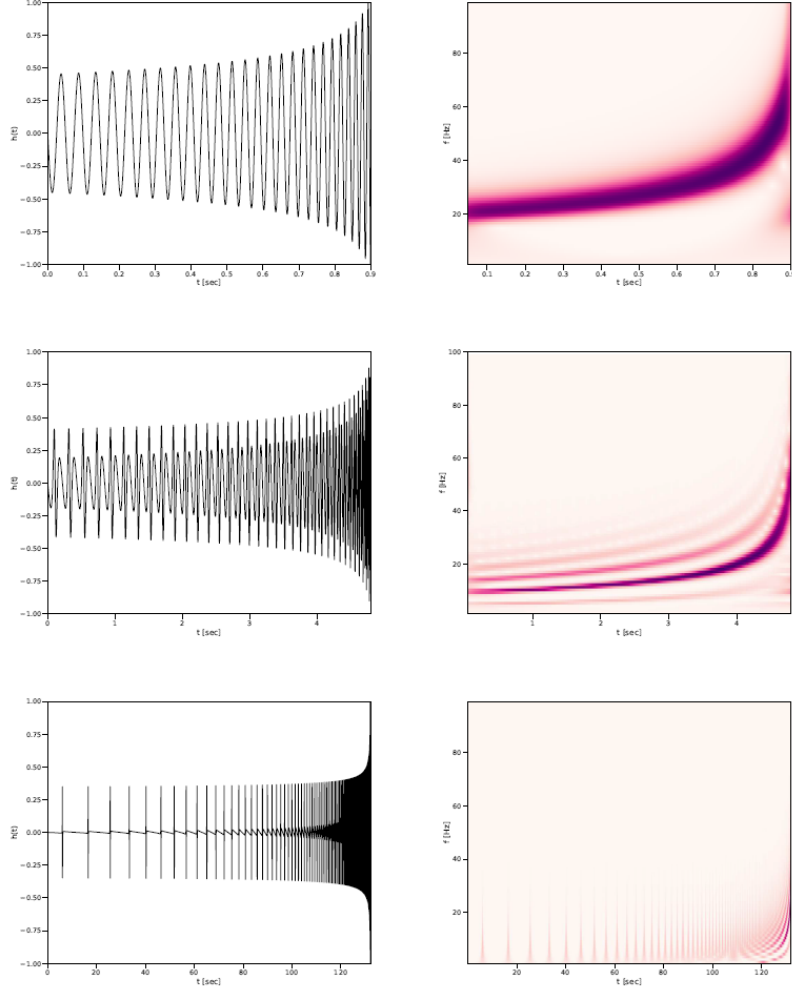


图 4-1 带偏心率波形的谐频效应示例^[189]。旋近的时域波形与对应的时频图，从上到下分别为 $e_i = 0, e_i = 0.35, e_i = 0.95$ 。偏心率越大谐频效应越明显，无偏心率时只有主频部分。

4.1 引力波信号的天线响应：含偏心率情形

EccentricFD 是一个已被收录到 LALSuite 中的一个较为成熟的波形，这是一个不考虑自旋效应的频域波形，其偏心率的有效范围为 $e_i \lesssim 0.4$ ^[134, 135]。本小节我们将以该波形为例推导带偏心率的波形的 TDI 响应。

首先，带偏心率的波形可以简单写为

$$\tilde{h}_{+, \times} = \tilde{A} f^{-7/6} \sum_{j=1}^{10} \xi_j^{+, \times} \left(\frac{j}{2} \right)^{2/3} e^{i\Psi_j}, \quad (4-2)$$

其中

$$\tilde{\mathcal{A}} = - \left(\frac{5}{384} \right)^{1/2} \pi^{-2/3} \frac{\mathcal{M}^{5/6}}{D_L}, \quad (4-3)$$

只与啁啾质量 $\mathcal{M}$ 和光度距离 D_L 有关,

$$\xi_j^{+, \times} = \frac{(1 - e^2)^{7/4}}{\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)^{1/2}} \left(C_{+, \times}^{(j)} + i S_{+, \times}^{(j)} \right) \quad (4-4)$$

是与两种极化模式相关的系数, 是 ι, φ 以及偏心率 $e(F)$ 的函数, 当 $e = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \xi_{j=2}^+ &= C_+^{(2)} + i S_+^{(2)} = 4 \cdot \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} e^{i \cdot 2\varphi}, \\ \xi_{j=2}^\times &= C_\times^{(2)} + i S_\times^{(2)} = 4 \cdot (-\cos \iota) e^{i \cdot 2\varphi}, \\ \xi_{j \neq 2}^{+, \times} &= 0, \end{aligned} \quad (4-5)$$

则回到了我们在上文式(2-51)讨论的 $K_{22}^{+, \times}$ 。由于带偏心率情况下的该系数非常复杂, 具体形式可参见 Yunes 等人的文献附录 B^[135]。 Ψ_j 是 Fourier 相位, 写做

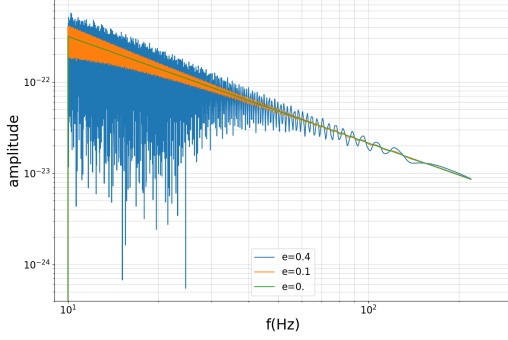
$$\Psi_j = \frac{\pi}{4} + j\phi_c - 2\pi f t_c + \left(\frac{j}{2} \right)^{8/3} \Psi_{\text{PN}}^{\text{ecc}}, \quad (4-6)$$

$$\Psi_{\text{PN}}^{\text{ecc}} = \frac{3}{128\eta(\pi M f)^{5/3}} \sum_{n=0}^7 \alpha_n (\pi M f)^{n/3} \quad (4-7)$$

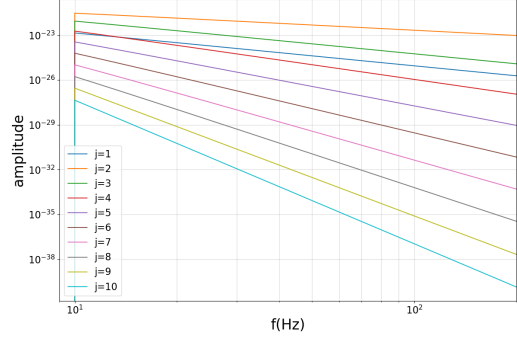
是带偏心率时的 PN 相位, $\alpha_n = \alpha_n(M, \eta, e, f)$ 是不同 PN 阶数下的系数, 具体形式可参见 Huerta 等人的文献附录 A^[134]。由于该波形基于 TaylorF2, 因此这里的相位包含了 3.5PN 阶相位修正。以上振幅和相位都将沿着偏心率展开至 $\mathcal{O}(e^8)$, 并依照

$$\begin{aligned} e \sim e_i \chi^{-19/18} \left\{ 1 + \frac{3323}{1824} e_i^2 [1 - \chi^{-19/9}] + \frac{15994231}{6653952} e_i^4 \left[1 - \frac{66253974}{15994231} \chi^{-19/9} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{50259743}{15994231} \chi^{-38/9} \right] + \frac{105734339801}{36410425344} e_i^6 \left[1 - \frac{1138825333323}{105734339801} \chi^{-19/9} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2505196889835}{105734339801} \chi^{-38/9} - \frac{1472105896313}{105734339801} \chi^{-19/3} \right] + \mathcal{O}(e_i^8) \right\} \end{aligned} \quad (4-8)$$

进一步沿初始偏心率 e_i 展开至 $\mathcal{O}(e_i^8)$ 。其中 $\chi \equiv F/F_0 = f/f_0$, 而 f_0 是偏心率为 e_i 偏心率主频 (即 $j = 2$) 下的引力波初始频率。

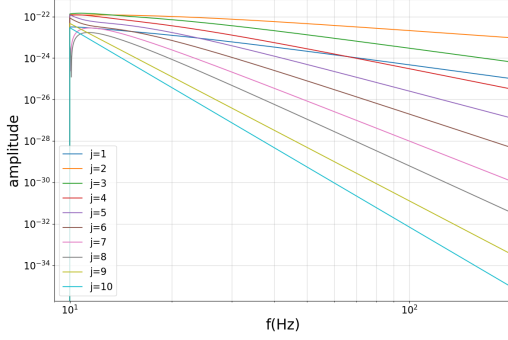


(a) 不同偏心率下总的波形的振幅

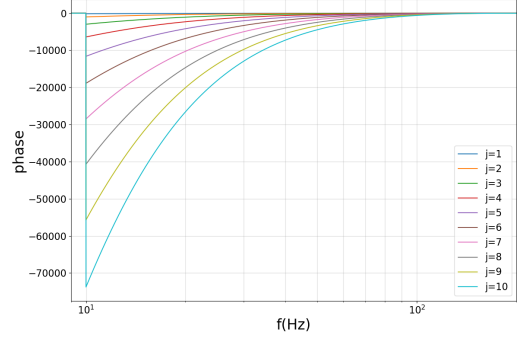


(b) 同一示例波形 ($e_i = 0.1$) 不同谐频的振幅

图 4-2 EccentricFD 波形示例

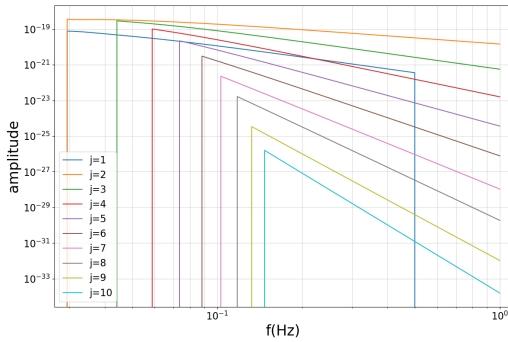


(a) 不同谐频的振幅

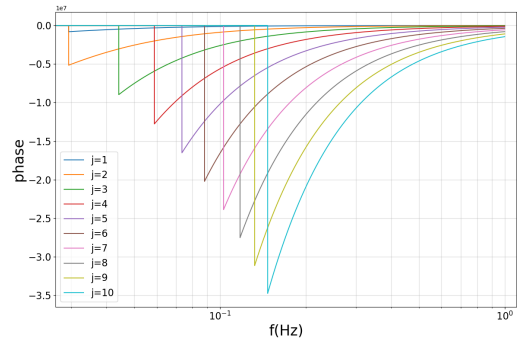


(b) 不同谐频的相位

图 4-3 EccentricFD 波形示例, 其中 $e_i = 0.4$, 其他条件与图4-2相同。



(a) 不同谐频的振幅



(b) 不同谐频的相位

图 4-4 空间探测器情况下谐频截断的示例波形 ($e_i = 0.4$)

需要注意的是, 频域波形需要有明确的高低频截断, 对于地面探测器, 我们在低频选取探测器约定的加速度噪声截断, 而在高频则选取 ISCO 频率, 如对于

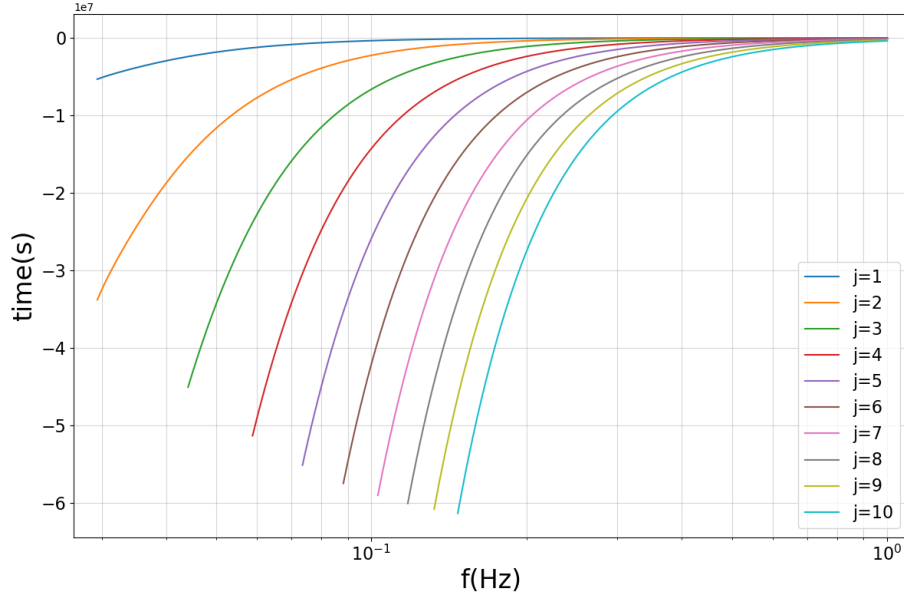


图 4-5 与图4-4同一示例波形 ($e_i = 0.4$), 不同谐频的相位计算出的不同谐频的时频关系。

LIGO, 有

$$f_{\text{low}} = 20\text{Hz}, f_{\text{high}} = f_{\text{ISCO}} = 1/(6^{3/2}\pi M), \quad (4-9)$$

那么为了保证更高阶谐频也不超过频率有效范围, 则需要进行谐频截断, 即

$$\tilde{h}_{\text{ground}} = \tilde{h} \times \Theta(j \cdot f_{\text{high}} - 2f), \quad (4-10)$$

其中 $\Theta(x)$ 为阶跃函数 (Heaviside function)。那么对于空间探测器, 则有

$$f_{\text{low}} = 10^{-4}\text{Hz}, f_{\text{high}} = \min[f_{\text{ISCO}}, 1\text{Hz}], \quad (4-11)$$

但事实上, 由于空间探测器往往以观测时间为标准, 特别是恒星级双黑洞, 并不会达到低频限制, 因此有

$$\tilde{h}_{\text{space}} = \tilde{h} \times \Theta(j \cdot f_{\text{high}} - 2f) \Theta(2f - j \cdot f_{\text{yr}}), \quad (4-12)$$

其中 f_{yr} 是距离 ISCO 时间为观测时长 T 时对应的主频的频率。含有偏心率时, f_{yr} 的大小会与准圆轨道下的结果有所差别。然而, 当总质量小于 $10^5 M_{\odot}$ 时, 年为量级的观测时间下, f_{yr} 在任意有效偏心率区间下都将非常接近无偏心率时的 f_{yr} 的

大小^[135]——显然，恒星级双黑洞符合该要求。因此，我们后面将使用较为简单的主频时频关系计算 f_{yr} ，即回到式(2-27)：

$$f = (5/256)^{3/8} \frac{1}{\pi} \mathcal{M}^{-5/8} (t_c - t)^{-3/8}.$$

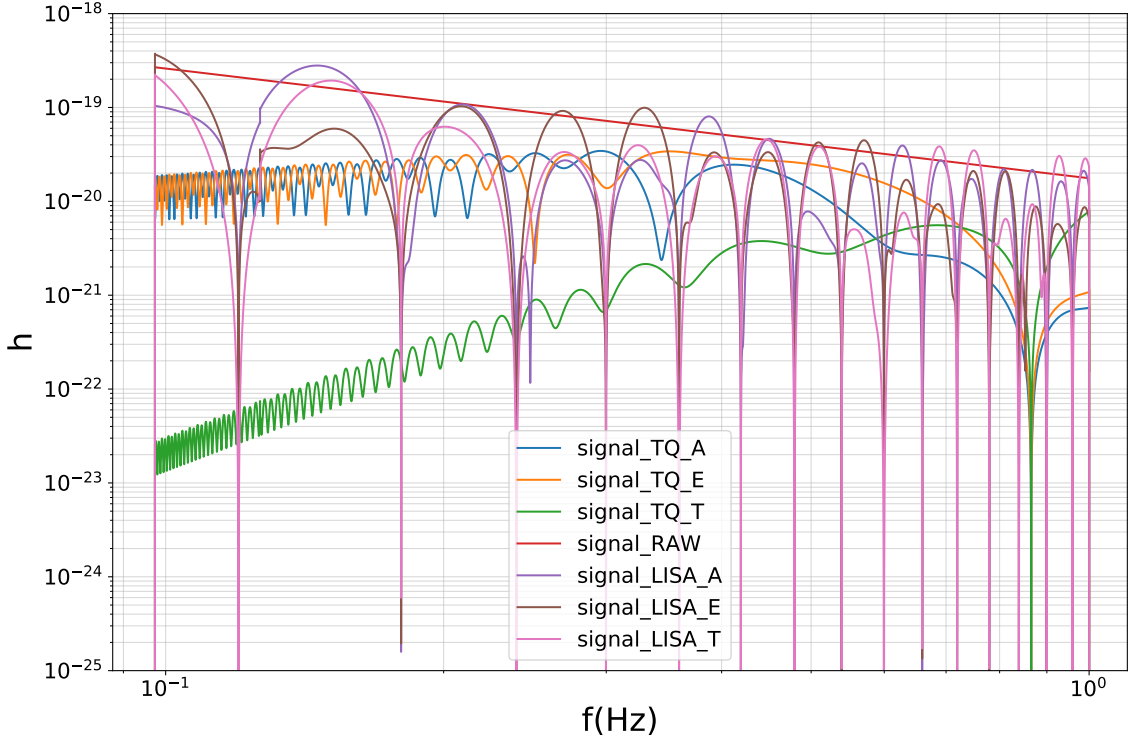


图 4-6 一个示例事件 ($e_i = 0$) 的原始波形以及在天琴和 LISA 中的 TDI 响应波形 (A, E, T 通道)，图中曲线均为对应波形的振幅。

尽管 **EccentricFD** 波形的球谐函数谐频为单个的主模，即 $(\ell, m) = (2, 2)$ ，在考虑响应时，对于带偏心率的情况，我们仍然不能直接简单地计算式(2-55)中 P_{22} 的值。对于不同的偏心率谐频，它们有不同的时频关系（如图4-5），这与上文提到的自旋权重球谐函数的情况是类似的，因此也需要类似的讨论，那么不同的偏心率谐频的时频关系可以写为

$$t_f^j = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi_j}{df}, \quad (4-13)$$

然后对每一个谐频分别做响应。需要注意的是，即便 $\xi_j^{+, \times}$ 也是复数，看起来似乎应该也对幅角做出贡献，但事实上， t_f 是来自于稳相近似的，而 Ψ_j 才是真正的 Fourier 相位。此外，由于 $\xi_j^{+, \times}$ 将不再像 $K_{22}^{+, \times}$ 那样简单，这个系数是偏心率的函

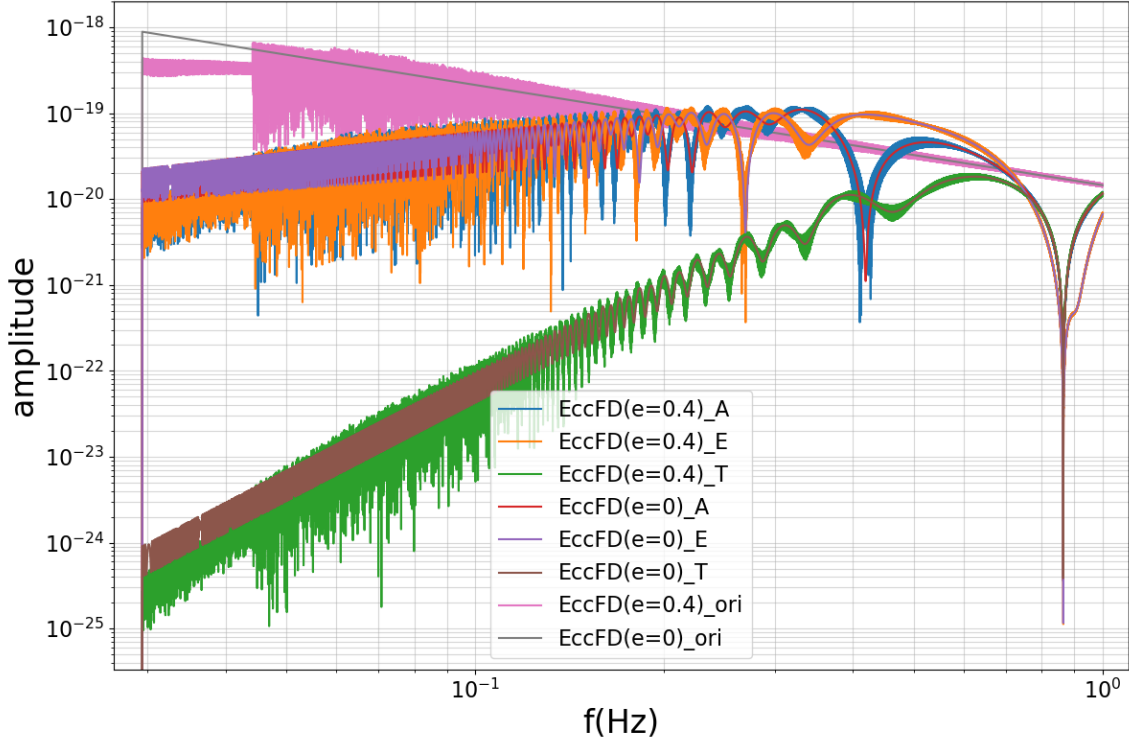


图 4-7 含偏心率时 ($e_i = 0.4$) 的原始波形以及天琴的 TDI 响应波形, 其余条件与图4-4相同。图中也画出了相同情况下 $e_i = 0$ 时的对应曲线, 以作对比。

数, 因此也不得不将其与波形其他部分共同计算。

但上面的考虑是可以接受的, 因为 P_{lm} 只是 $P_{+, \times}$ 的线性组合, 理论上, 我们可以回到式(2-33), 即

$$H = \sum_j \tilde{h}_j, \quad (4-14)$$

$$\tilde{h}_j = P_+ \tilde{h}_j^+ + P_\times \tilde{h}_j^\times,$$

并重新将式(2-56)-(2-58)表示出来, 即

$$\tilde{y}_{slr} = \sum_j \mathcal{T}_{slr}^j(f) : \tilde{h}_j, \quad (4-15)$$

$$\mathcal{T}_{slr}^j(f) = G_{slr}(f, t_f^j), \quad (4-16)$$

$$G_{slr}(f, t) = \frac{i\pi f L}{2} \text{sinc}[\pi f L (1 - k \cdot n_l)] \cdot \exp[i\pi f (L + k \cdot (p_r + p_s))] n_l \otimes n_l, \quad (4-17)$$

这里 $A : B = A_{ij} B_{ij}$, $\otimes$ 代表矢量积。这样我们就可以将空间探测器天线响应应用到含偏心率的波形中了。

4.2 GWSpace: 多任务空间引力波数据模拟软件

基于以上内容，并结合了其他类型引力波源的生成与模拟，我们制作了用于空间引力波探测的多任务科学数据模拟软件 GWSpace¹。该程序包以 Python 为主要开发语言，涵盖了天琴、LISA 和太极三种类型的探测器，并支持双黑洞、银河系致密双星 (Galaxy Compact Binary, GCB)、极端质量比旋近 (Extreme Mass Ratio Inspiral, EMRI)、引力波暴等多种空间探测器引力波源，如图4-8所示。整体结构大致分为以下几个模块：

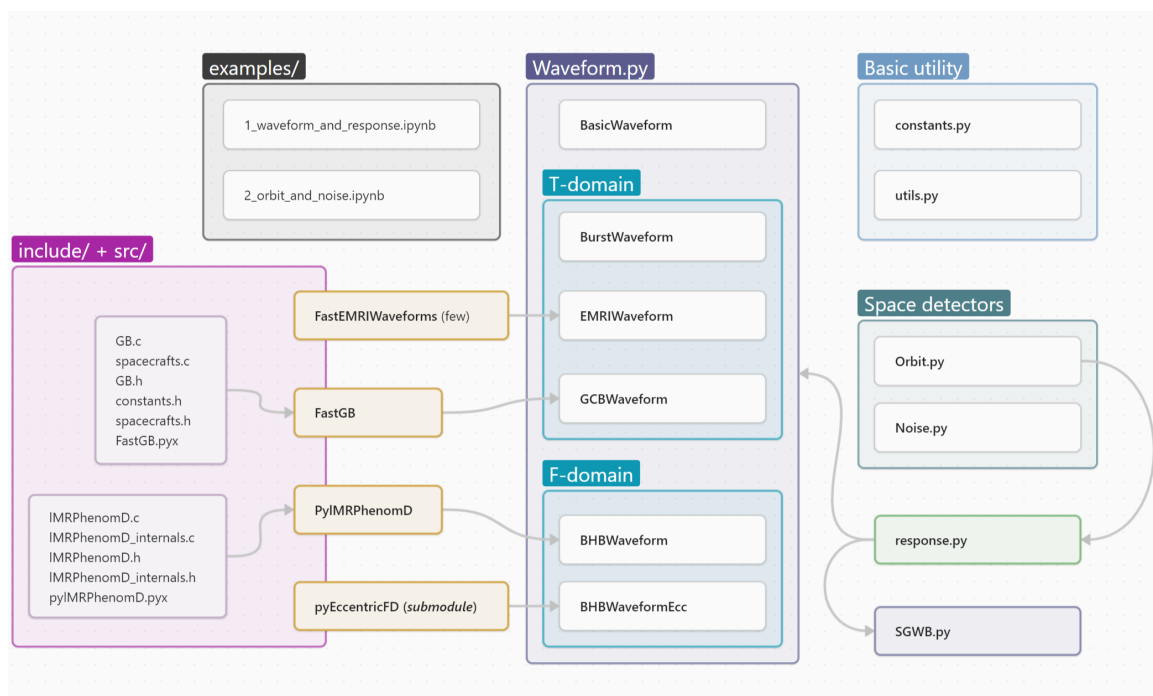


图 4-8 GWSpace 程序包结构示意图，详见正文。

基础工具模块

- **constants:** 定义程序所需的基本常数及探测器相关约定。为确保不同语言实现中使用一致的常数，安装时会通过 `constants.h` 自动生成。
- **utils:** 提供诸如参数转换、坐标转换等常用工具函数。

空间探测器模块

- **Orbit:** 基于 `Orbit` 类，为各种空间探测器提供轨道计算方法和相关属性，详细内容请参考小节2.3.2.4。

¹【软著登字第 13992820 号】——已正式公布于 GitHub: <https://github.com/TianQinSYSU/GWSpace>。

- **Noise:** 基于 Noise 类, 提供不同探测器在各构型及通道下的噪声 PSD、白矮星前景噪声及灵敏度曲线信息。详细内容请参考小节2.3.2和节3.1。需要注意, 由于恒星级黑洞频率演化的特点, 本课题将不考虑前景噪声的影响。

天线响应模块: **response**

- 负责计算时间域和频率域下 TDI 响应 (如 X, Y, Z, A, E, T 通道) 的传递函数或响应后的引力波波形。详细内容请参考小节2.3.2。注意, 本课题将采用适用于啁啾信号的频域响应, 这里的时域响应则通常与时域波形 (例如 EMRI 和 GCB 波形) 配合使用。

波形模块: **Waveform**

- **BasicWaveform:** 所有具体波形类的基础类, 定义了通用参数、属性和方法。
- **BurstWaveform:** 提供一个基本的 sin-Gaussian 形状的引力波暴波形。
- **EMRIWaveform:** 提供 EMRI 波形接口, 用来调用 FastEMRIWaveform (FEW) 程序包², 该包支持 CPU 和 GPU 计算, 广泛应用于高效生成 EMRI 信号^[190, 191]。EMRI 通常是由一个大质量黑洞和一个恒星级质量黑洞 (或其他致密天体) 组成的系统, 是空间探测器的一类重要引力波源。
- **GCBWaveform:** 提供 GCB 波形接口。支持生成适用于银河系内致密双星的近单频、振幅稳定波形。除此以外, 该模块还支持调用 C 语言编译的 GCB 波形代码 FastGB, 该程序适用于涉及大量 GCB 系统时的波形加速计算, 已在 MLDC 数据处理中得到应用^[192, 193]。需要注意, 后者的计算结果已经包含天线响应, 无需后续处理。
- **BHBWaveform:** 提供双黑洞波形接口, 该程序采用频域的 IMRPhenomD 波形^[130, 131], 这是一个自旋同轴, 不含进动效应的波形。为便于计算空间探测器的天线响应, 这里对 C 语言接口做了适当调整, 并打包为 PyIMRPhenomD 供程序调用。
- **BHBWaveformEcc:** 提供含偏心率的双黑洞波形接口, 这里采用的波形就是本课题所涉及的 EccentricFD 波形。同样, 为适应空间探测器下对谐频拆分的需求, 我们对原始代码进行了修改, 并制成子模块 pyEccentricFD³。安装时该子模块将会被自动配置。详细内容请参考节4.1。

随机引力波背景模块: **SGWB**

²<https://github.com/BlackHolePerturbationToolkit/FastEMRIWaveforms>

³已正式公布于 GitHub: <https://github.com/HumphreyWang/pyEccentricFD>。

- 与上面提到的可分辨的引力波源不同，随机引力波背景 (Stochastic Gravitational Wave Background, SGWB) 指的是大量独立随机的波源叠加而成的信号，主要有宇宙学和天体物理两种起源方式。这里我们提供了 Gaussian 类型背景信号的生成方法，支持各向同性以及单一指定方向的背景，并包含计算响应后背景分布的接口。

示例模块

- 除了核心功能外，我们还提供了两组 Jupyter Notebook 示例文档，涵盖上述各模块的运行实例，帮助用户更快上手和理解程序的使用方法。

我们已将本程序包中 LISA 天线响应函数的计算结果与 Marsat 等人^[90]的成果进行了对比，二者高度一致^[194]。当前程序包正持续迭代：我们增加了下一代 TDI 构型下的响应函数与噪声模型，并新增了双黑洞铃宕信号等多种波形接口。后续迭代完成后，我们还将与其他 LISA 探测器模拟软件开展全面对比分析，以进一步验证并优化模拟性能。

4.3 恒星级双黑洞信噪比与空间方位的关系

在小节2.3.2.4中我们提到，LISA 在围绕太阳旋转时，探测器平面指向并不固定，而天琴探测器轨道平面指向是固定的（指向双白矮星系统 RX J0806.3+1527），这是除了地心轨道以外与 LISA 探测器的又一主要不同。为了进一步探究这种设计的影响，我们通过已制作的 GWSpace 程序包，以恒星级双黑洞为例，计算不同方位源的信噪比。

具体地，我们考虑类 GW150914 和类 GW190521 两种系统。前者是首个被探测的引力波事件，代表了典型的恒星级黑洞质量大小；后者是质量相对较大的引力波事件，其并合后生成的黑洞超出了 $100M_{\odot}$ ，是典型的中等质量黑洞，对于探测早期旋近阶段的空间探测器来说，探测这样质量偏大的双黑洞系统要更具优势。

表 4-1 GW150914 和 GW190521 的源参数信息^[7, 69]。表中质量参数均指源坐标系下的质量。

	GW150914	GW190521
$m_1 [M_{\odot}]$	35.6	98.4
$m_2 [M_{\odot}]$	30.6	57.2
$D_L [\text{Mpc}]$	440	3310

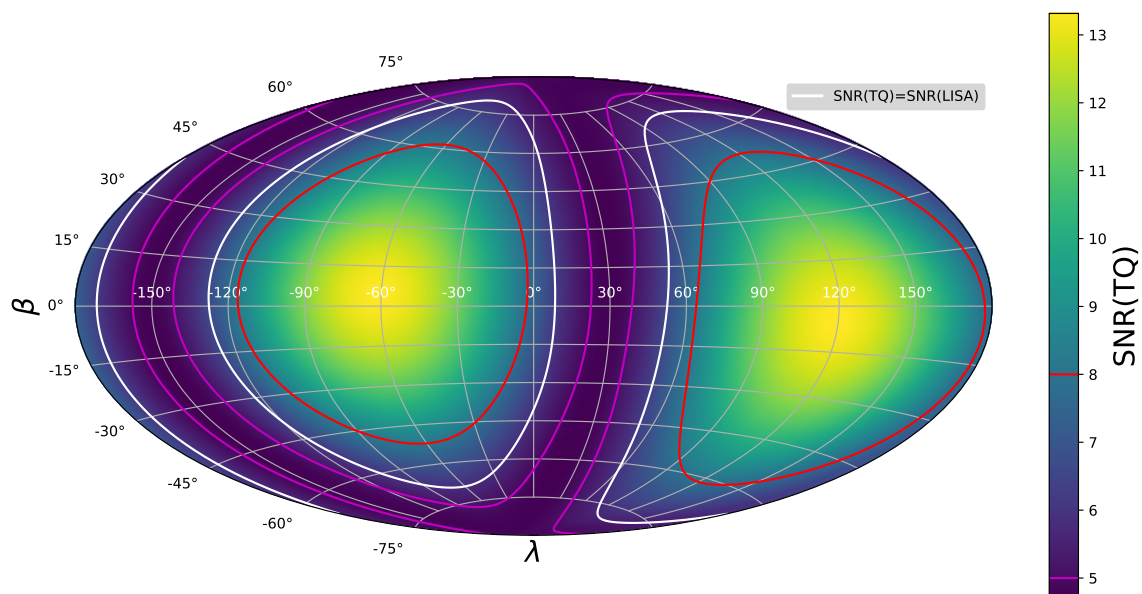


图 4-9 类 GW150914 源在天琴中的信噪比随空间方位的分布 (TDI-A 通道)。红色与紫色线分别代表了信噪比为 5 和 8 的等高线，白色等高线代表同一情况下系统在天琴和 LISA 中信噪比相同的位置，详见图4-11。

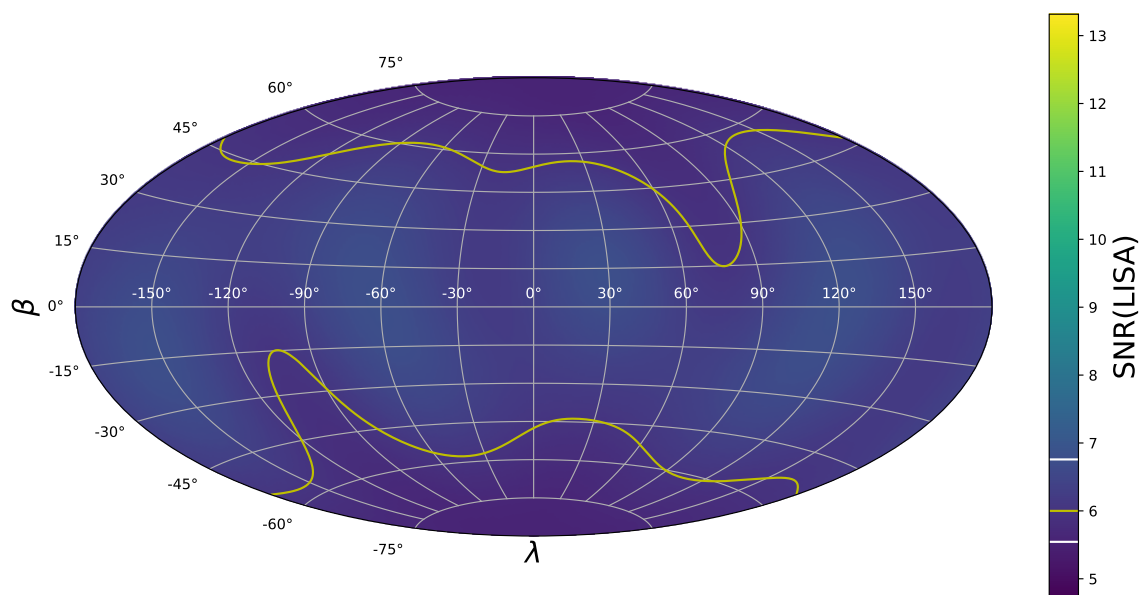


图 4-10 类 GW150914 源在 LISA 中的信噪比随空间方位的分布 (TDI-A 通道)。该图的颜色范围与图4-9相同，黄色线代表了信噪比为 6 的等高线，颜色条上的白色刻度代表该图中信噪比的最值。

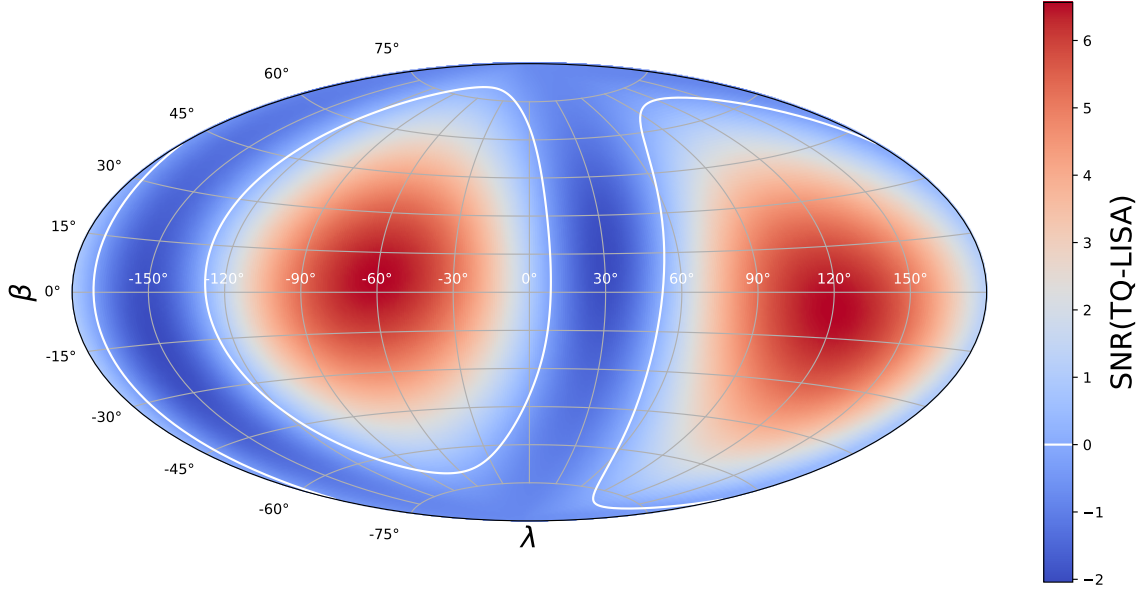


图 4-11 类 GW150914 源在天琴与 LISA 中的信噪比差值随空间方位的分布，即图4-9和4-10的值相减的结果。白色线代表同一情况下系统在天琴和 LISA 中信噪比相同的位置，即差值为 0 的等高线。

表4-1列举了我们使用的源参数信息，由于这里我们主要探究的是空间方位的影响，我们选取 IMRPhenomD 波形，并将其他角度参数和自旋参数设置为默认值 0。随后，我们在黄经黄纬上均匀选取 401×201 个点，考虑五年的观测时长，即假设探测器将完整观测系统从并合前五年到并合时刻的过程，计算 TDI 构型下系统在 A, E, T 通道的信噪比。

对于类 GW150914 的源，天琴和 LISA 情况下的结果分别如图4-9和4-10所示。为了方便对比，我们统一了二者的颜色条范围。可以看到，天琴探测器由于时刻指向位于 $\lambda = 120.5^\circ, \beta = -4.7^\circ$ 的双白矮星系统，当双黑洞在天球上位于该系统相同或对向位置时，在天琴中可以获得最高的信噪比。若双黑洞位置刚好处于探测器平面与天球相交的大圆上，则获得的信噪比相对最低。并且由于这种指向性，导致不同位置的信噪比差异悬殊。而 LISA 的结果中不同位置的源信噪比没有显著差别。这是由于 LISA 的轨道设计使得其在绕日旋转时，轨道平面时刻与黄道面有 120° 的夹角，因此指向上并不固定，加之年量级的观测时长，使得结果得到了进一步的平均。为了进一步对比两种探测器的差别，我们将二者对应的信噪比相减，如图4-11所示。我们还将该图中对应信噪比差值为 0 的等高线也画入了天琴的信噪比结果图中（图4-9）以供参考。显然，如果双黑洞位置处于天琴探测器平面与天球相交的大圆附近的位置上，则 LISA 的信噪比要比天琴高，否则天琴将会更具优势。

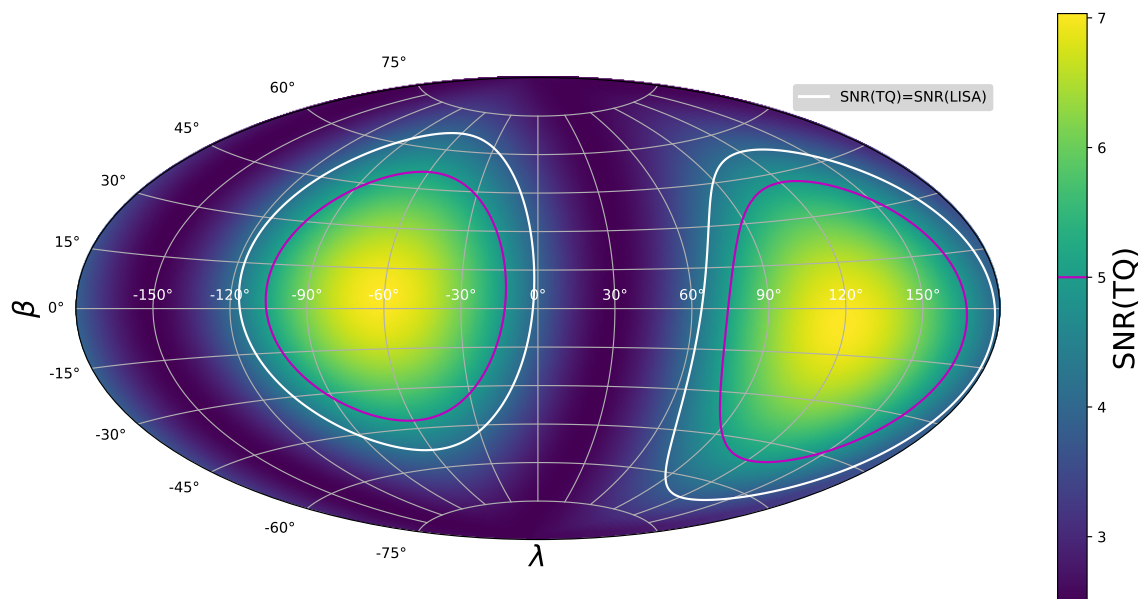


图 4-12 类 GW190521 系统，其余同4-9。

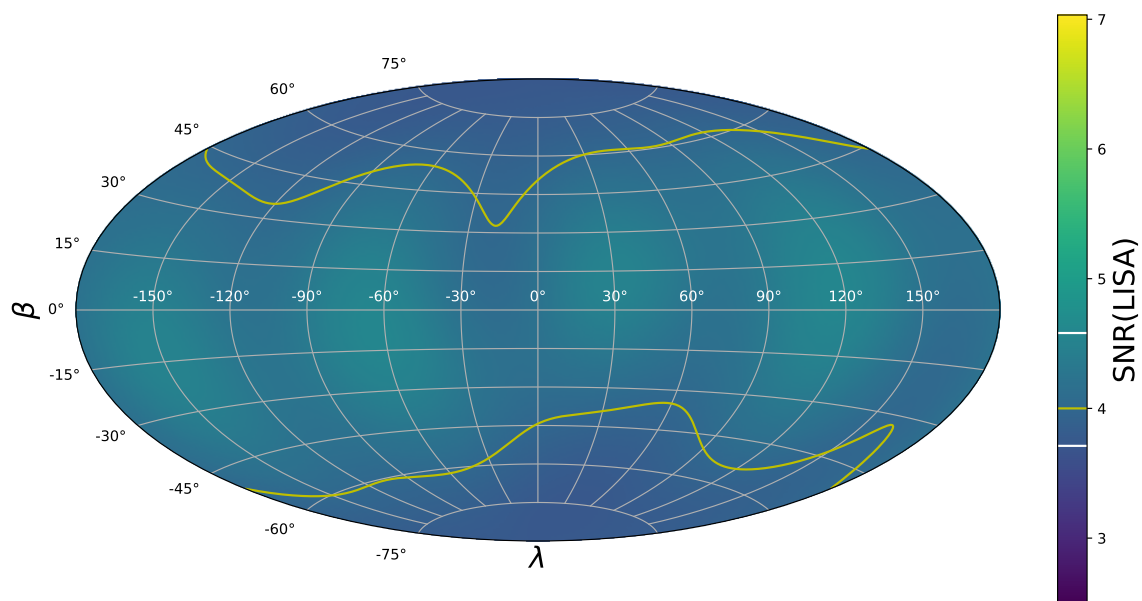


图 4-13 类 GW190521 系统，基本设置同4-10。该图的颜色范围与图4-12相同，黄色线代表了信噪比为 4 的等高线，颜色条上的白色刻度代表该图中信噪比的最值。

对于类 GW190521 的源，结果和类 GW150914 的源较为相似，如图4-12、4-13和4-14所示。较为不同的是，虽然其质量比 GW150914 大，但由于距离较远，因此信噪比更低。此外，由于 LISA 相比于天琴的灵敏频段要略低，因此相比于天琴，

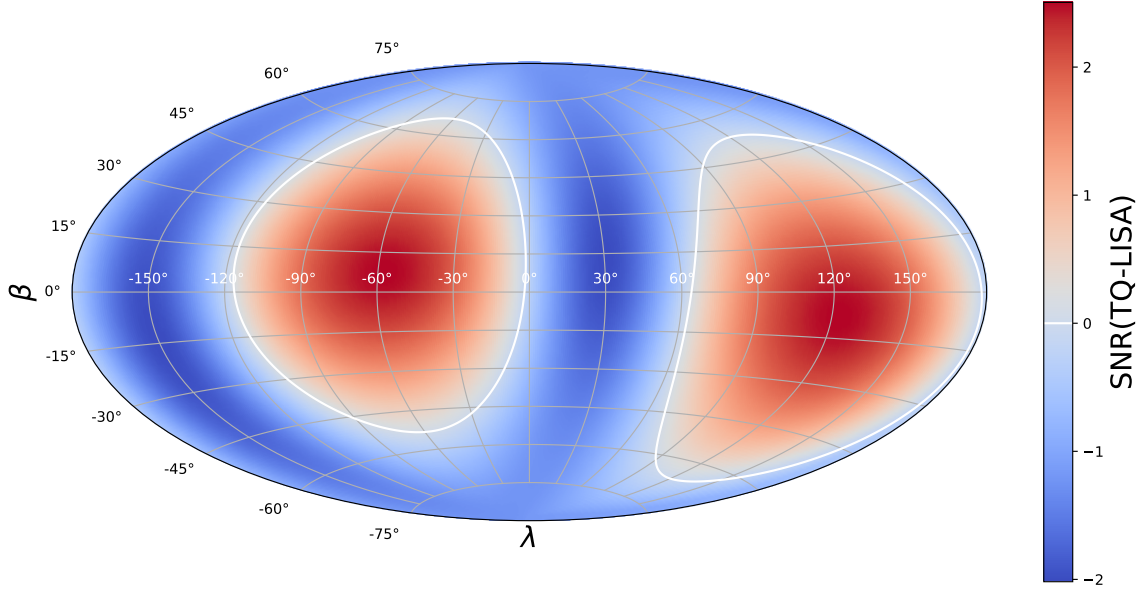


图 4-14 类 GW190521 系统，其余同4-11。

其探测更大质量双黑洞时要更具优势。因此图4-14的等信噪比线要比图4-11囊括的天区更小，即由于灵敏频段的差别，在双黑洞质量较高时，天琴相比 LISA 的优势天区要朝着远离天琴轨道平面对应的位置缩小。这也同时说明了，如果考虑多探测器联合观测，在信噪比得到提升的同时，还可以发挥各自探测器的探测优势，从而更好地限制系统的物理特征。

需要注意的是，以上展示的均是 TDI-A 通道下的信噪比结果。这主要是因为 A 通道和 E 通道的信噪比表现相似，而 T 通道本身在设计上对引力波信号灵敏度极低，往往被称作零通道 (null stream)。这是由于 A, E, T 通道构造时通过正交变换实现了噪声的相互正交，而在物理上只有两个独立的信号探测器，剩下下来的 T 通道，主要用于监测仪器噪声或随机引力波背景信号。因此这里不再展示每一个通道的具体结果。在实际探测过程中，空间探测器的总信噪比通常定义为三个通道信噪比的均方根，即

$$\rho = \sqrt{\rho_A^2 + \rho_E^2 + \rho_T^2}.$$

因此，实际的总信噪比会高于单一通道所展示的数值，但两者概念并不相同。我们在下一章中也将统一在 A 通道进行数据处理，不再额外对其他通道进行讨论。

此外，引力波探测器并不能够确保开机后一直处于工作状态。LISA 的占空比 (duty cycle) 预期在 75% 左右^[195]；天琴预计采用三个月工作，三个月待机的的工作模式，因此占空比约为 50%^[28]。这会对信噪比的大小存在一定的影响，但是并不改

变以上所讨论的信噪比随空间方位分布的特征。类似地，以上特征对于空间探测器所探测的其他啁啾信号也具有广泛的适用性。在本课题中，我们将不考虑数据间隙对数据处理的影响。

4.4 本章小结

在这一章中，我们实现了对本课题的目标引力波信号的模拟。我们结合前文介绍的探测器轨道、噪声和响应等基本信息搭建了数据模拟软件 `GWSpace`。首先，我们以 `EccentricFD` 为例，指出了含偏心率波形中存在偏心率谐频，并在程序上完成了谐频的分解，构建了 `pyEccentricFD` 程序包，并将其作为子模块接入到 `GWSpace` 中。在此基础上，我们推导了含偏心率情况下的 TDI 响应，指出不同偏心率谐频有不同的谐频关系，并且需要像处理自旋权重球谐函数谐频一样，不同谐频分别计算响应函数，以使得该响应符合实际的物理过程。`GWSpace` 支持多种空间引力波探测器下的数据模拟，不仅支持本课题需要使用的含偏心率双黑洞波形的响应计算，还支持其他多种典型空间引力波源，提供了多种实用工具和针对不同探测器的统一接口，并提供丰富示例供用户学习使用，目前也在进一步迭代中。

最后，我们使用该程序包，对恒星级双黑洞信号信噪比和空间方位的关系给出了讨论。通过探究典型的两种恒星级双黑洞系统（GW150914 和 GW190521），我们验证了由于天琴探测器指向固定，在更靠近轨道平面指向（或指向的对向）位置处的源会有更高的信噪比，天琴相比 LISA 更有优势，反之 LISA 更有优势。这也说明了，虽然由于灵敏频段不同，对于同样的啁啾信号源 LISA 在探测更大质量源时比天琴有优势，但在实际探测过程中探测能力依旧会受到其他参数的影响，因而不能一概而论。

接下来，我们基于此生成包含探测器响应效应的、带偏心率特征的双黑洞波形，并将其应用于模板库的构建。

第 5 章 恒星级双黑洞的档案搜索

根据我们在图1-4所描述的，档案搜索首先需要从地面探测中获取候选事件的源参数信息，以确定档案搜索时的参数空间范围。随后需要针对该参数空间生成波形模板库，有了模板库以后就可以对空间探测器的（模拟）数据进行探测了。在本章节我们将逐一探究这些过程，并着重讨论模板库的生成部分。

5.1 地面探测器网络的探测能力

首先我们需要利用 FIM 对下一代地面探测器网络的参数精度进行估计，以分析地面引力波探测器可以将参数空间缩减的程度。同样，我们以 GW150914 和 GW190521 为例，考虑 ET + dual CE 多地面探测器联合探测。我们假定 ET 位于意大利，一个 CE 位于美国的 LIGO Hanford 探测器位置，另一个 CE 位于澳大利亚，这些位置信息均已记录在 LIGO 使用的软件包 LALSuite 中。需要注意的是，这些位置并不代表这些探测器未来的准确位置，仅仅作为模拟的下一代探测器网络配置。对于地面探测器方面的计算，由于不考虑进入地面探测器灵敏频段时的偏心率，加之需要计算从旋近、并合到铃宕阶段，我们使用 IMRPhenomHM 波形。我们还使用模型 CosmicExplorerP1600143 和 EinsteinTelescopeP1600143 作为 CE 和 ET 的 PSD（对应图3-1中的蓝色与红色曲线），与此同时选取 1Hz 作为下一代地面探测器的频率下限。对于红移 z 的计算，我们使用 Planck15 宇宙学参数^[196]。

为了将地面与空间探测器的探测能力相对比，我们同时也计算了两个源在天琴和 LISA 情况下的 FIM。与上一章相同，考虑总观测时长 $T_{\text{obs}} = 5\text{yr}$ ，探测器从系统并合前五年观测到其并合时刻。对于空间探测器，我们将考虑偏心率的影响，使用 EccentricFD 波形做计算。最终计算出不同参数可以达到的不确定度范围如表5-1和5-2所示。

从结果来看，大部分精度估计结果与前人的工作相符合^[80, 108]。对于不考虑偏心率的情况，只有啁啾质量参数是空间探测器可以给出更高的精度估计的。因此，在后面的研究中，我们将把其余所有参数固定，在空间探测器的档案搜索中只考虑质量参数和偏心率，啁啾质量参数的取值范围则由地面探测器网络的估计结果决定，即 $\mathcal{M} \in [\mathcal{M}_0 - 10\sigma_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}_0 + 10\sigma_{\mathcal{M}}]$ 。在未来实际的档案搜索中，我们应该直接使用实际引力波事件的参数估计结果，用该结果的不确定度范围来决定参数空间的取值范围，我们将在下一章详细展开这部分的计算。在本章节的讨论中，由 FIM 得到的这些结果仍是一个合理且相对保守的估计。

表 5-1 不同探测器（网络）对类 GW150914 源的参数精度估计。除探测器系质量 $\mathcal{M}_{\text{det}} = (1+z)\mathcal{M}$ 外，质量参数均指源坐标系下的质量。空间探测器均展示 TDI-A 通道的计算结果。结果中不确定度超出物理范围的，用该参数最大物理范围代替展示（详见正文）。

	Injected value	Uncertainty ($e_i = 0$)			Uncertainty ($e_i = 0.1$)	
		ET + dual CE	TianQin	LISA	TianQin	LISA
$\mathcal{M} [M_\odot]$	28.72					
$\mathcal{M}_{\text{det}} [M_\odot]$	31.39	3.48×10^{-4}	3.08×10^{-5}	2.74×10^{-5}	3.00×10^{-5}	2.78×10^{-5}
η	0.2486	2.19×10^{-5}	3.25×10^{-4}	4.02×10^{-4}	1.82×10^{-4}	1.61×10^{-4}
$m_1 [M_\odot]$	35.6					
$m_2 [M_\odot]$	30.6					
$D_L [\text{Mpc}]$	440	1.27×10^{-1}	9.22×10^1	7.91×10^1	9.09×10^1	8.17×10^1
$\iota [\text{rad}]$	0	7.92×10^{-3}	π	π	π	π
$t_c [\text{s}]$	0	2.49×10^{-6}	2.07×10^0	3.78×10^0	2.06×10^0	3.31×10^0
$\phi_c [\text{rad}]$	0	2π	2π	2π	2π	2π
$\phi \text{ (RA)} [\text{rad}]$	1.571	3.27×10^{-4}				
$\theta \text{ (DEC)} [\text{rad}]$	-1.257	1.86×10^{-4}				
$\lambda [\text{rad}]$	4.712		3.75×10^{-2}	3.87×10^{-2}	3.74×10^{-2}	3.88×10^{-2}
$\beta [\text{rad}]$	-1.476		4.08×10^{-3}	3.66×10^{-3}	3.72×10^{-3}	3.64×10^{-3}
$\Delta\Omega [\text{sq. deg.}]$	-	1.48×10^{-2}	3.95×10^1	3.64×10^1	3.58×10^1	3.64×10^1
$\psi [\text{rad}]$	0	2.40×10^{-3}	2.70×10^{-1}	4.78×10^{-1}	3.10×10^{-1}	4.27×10^{-1}
e_i	0 0.1	-	8.64×10^{-2}	8.41×10^{-2}	1.20×10^{-6}	9.62×10^{-7}

表 5-2 类 GW190521 源的情况，其余同表 5-1。

	Injected value	Uncertainty ($e_i = 0$)			Uncertainty ($e_i = 0.1$)	
		ET + dual CE	TianQin	LISA	TianQin	LISA
$\mathcal{M} [M_\odot]$	64.84					
$\mathcal{M}_{\text{det}} [M_\odot]$	100.84	4.09×10^{-2}	4.85×10^{-5}	5.67×10^{-5}	5.01×10^{-5}	5.52×10^{-5}
η	0.2325	3.50×10^{-4}	4.97×10^{-4}	7.36×10^{-4}	7.26×10^{-4}	1.09×10^{-3}
$m_1 [M_\odot]$	98.4					
$m_2 [M_\odot]$	57.2					
$D_L [\text{Mpc}]$	3310	6.45×10^0	6.68×10^2	7.79×10^2	6.77×10^2	7.92×10^2
$\iota [\text{rad}]$	0	8.92×10^{-3}	π	π	π	π
$t_c [\text{s}]$	0	4.97×10^{-5}	3.94×10^0	8.15×10^0	3.98×10^0	8.55×10^0
$\phi_c [\text{rad}]$	0	2π	2π	2π	2π	2π
$\phi \text{ (RA)} [\text{rad}]$	6.032	6.11×10^{-4}				
$\theta \text{ (DEC)} [\text{rad}]$	-0.785	3.38×10^{-4}				
$\lambda [\text{rad}]$	5.709		8.74×10^{-3}	1.20×10^{-2}	9.11×10^{-3}	1.27×10^{-2}
$\beta [\text{rad}]$	-0.617		1.29×10^{-2}	1.65×10^{-2}	1.30×10^{-2}	1.65×10^{-2}
$\Delta\Omega [\text{sq. deg.}]$	-	3.37×10^{-2}	1.69×10^1	2.93×10^1	1.77×10^1	3.15×10^1
$\psi [\text{rad}]$	0	6.13×10^{-3}	2.70×10^{-1}	3.79×10^{-1}	4.42×10^{-1}	4.67×10^{-1}
e_i	0 0.1	-	1.54×10^{-1}	2.02×10^{-1}	3.24×10^{-6}	4.19×10^{-6}

值得注意的是，从表中我们看到偏心率的不确定度在 $e_i = 0.1$ 时比 $e_i = 0$ 的情况小了约五个量级。这正如我们在前文讨论的，前者由于偏心率谐频的存在，可以帮助更为精确地限制偏心率参数，而后者，即当偏心率无限接近于 0 时，波形中只存在主模，其他模式几乎可以忽略不计，因此相比来看更不易确定偏心率的大小。需要注意的是，由于参数 ι 与 ϕ_c 的估计精度超出了它们的物理取值范围（即 $[0, \pi]$ 和 $[0, 2\pi]$ ），因此在表中我们使用了它们的最大物理范围作为不确定度。这种现象主要源于轨道倾角 ι 和光度距离 D_L 存在显著的参数简并关系，因此二者的不确定度都很大；而对于并合相位 ϕ_c ，作为一个冗余的相位参数，其对其他参数的影响极小，因此通常不关注这个参数。在此需要再次强调，Fisher 信息矩阵仅提供了探测器参数估计精度的数量级参考，其结果具有一定的指导意义，但并不代表精确的精度估计。本章节的研究旨在为后续档案搜索构建合理的模板库参数范围。

此外，表中空间探测器计算结果均为 TDI-A 通道的估计结果，而不是整个探测器的总估计结果。这主要是因为在下节生成模板库时，我们将以 A 通道为例进行讨论，为便于比较，统一展示 A 通道的结果。实际上，如果考虑整个探测器的综合估计，主要参数的不确定度范围将会缩减约 1.5 倍左右。这是因为探测器中存在两个等效独立的通道，从量级上看，整体结果与单一通道相比差别不大，从而不会改变上述结论。

以上，我们通过 FIM 给出了下一代地面探测器网络的参数估计精度，特别地，其中啁啾质量的估计（外加后面将选取的不同的偏心率范围）将会作为后面模板库生成时参数空间的取值范围，接下来就可以生成波形模板库了。

5.2 波形模板库的生成

如图5-1所示，将 GWSpace 相关的模块集成到 `sbank` 后，我们得到了适用于空间探测器情况的波形模板库生成程序。具体地，我们做了如下增改：

- `space_detector_psd`: 我们加入该模块以接入空间探测器的 PSD 信息，方便原 `psds` 模块调用；
- `tau0tau3`: 这里保存了生成候选模板参数的多种生成器，我们针对本课题的情况加入了无自旋的偏心率参数生成器 `nonspin_ecc_param_generator` 和无自旋的偏心率与啁啾质量参数生成器 `nonspin_ecc_mchirp_param_generator` 及相关工具；
- `ecc_waveform_lib`: 我们加入了该模块以方便接入制作好的 `pyEccentricFD` 波形程序包；

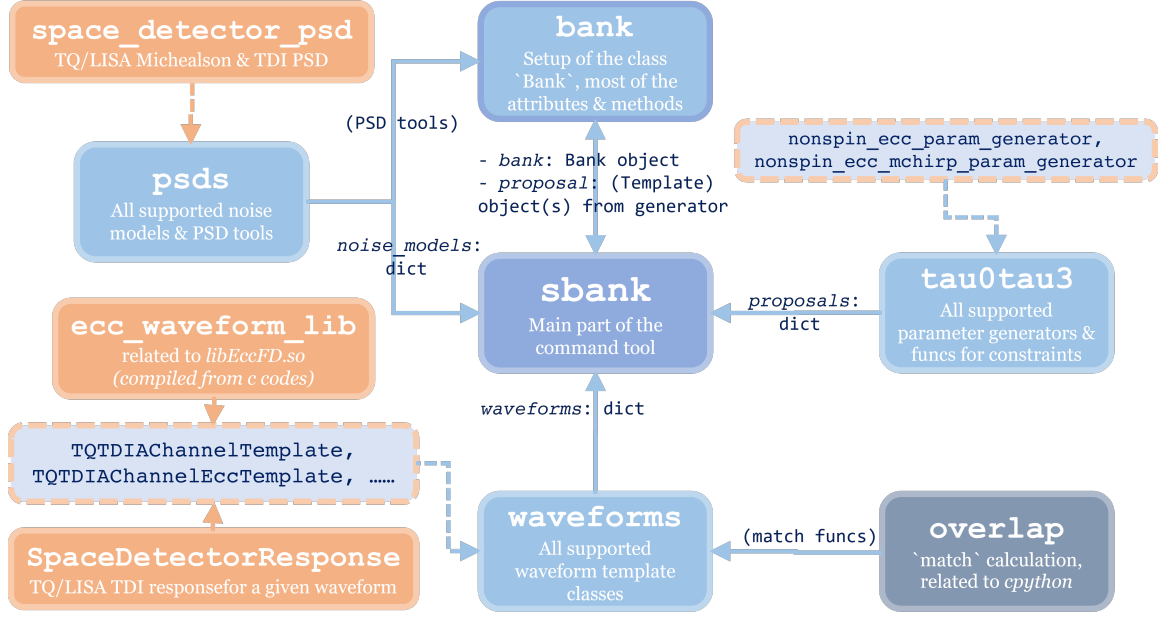


图 5-1 `sbank` 程序包结构示意图（同3-7），橙色框的部分为本课题的增改部分，虚线边框代表直接在原有程序中添加，全橙色模块代表新添加的程序模块，详见正文。

- **SpaceDetectorResponse**: 根据模板库生成时的使用需求，我们取出 `GWSpace` 中探测器轨道和响应的计算制作成该模块接入程序中；
- **waveforms**: 这里保存了各类波形模型的调用或计算方法，我们针对本课题的情况加入了含偏心率和无偏心率的波形类（如 `TQTDIAChannelTemplate` 和 `TQTDIAChannelEccTemplate` 等），以方便上两个模块的接入，并支持不同探测器和 TDI 通道。

接下来，我们将利用该流水线生成对应的模板库，并针对生成结果进行讨论。

5.2.1 模板库大小及特征

按照上一节的配置，考虑探测器从系统并合前五年观测到其并合时刻共五年的观测时长，啁啾质量范围 $\mathcal{M} \in [\mathcal{M}_0 - 10\sigma_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}_0 + 10\sigma_{\mathcal{M}}]$ ，计算最小匹配阈值 $M = 0.97$ 时多种情况下类 GW150914 和类 GW190521 源的波形模板库，以 TDI-A 通道为例，结果如表5-3所示。

首先是在档案搜索中只考虑啁啾质量的情形，其对应模板库大小可以控制在很小的量级 ($N_T \sim 10^3$)，该结果也与 Ewing 等人^[108] 的结果相符，也符合课题预期。而对于仅考虑偏心率参数的情形，即 $e_1 \in [0, 0.1]$ 时，新的参数空间范围所需模板数将比原有空间的高约 5 个量级。同一情况下，LISA 比天琴所需模板数略少，但在

表 5-3 五年观测时长下不同参数空间的模板库大小。表中质量均为探测器坐标系下的质量，带括号的数值由量级估计得出，详见正文。

		GW150914-like		GW190521-like	
TianQin	e_i	$\mathcal{M} [M_\odot]$		$\mathcal{M} [M_\odot]$	
		=31.383	[31.383,31.391]	=100.80	[100.80, 100.88]
	=0	1	3034	1	4250
	[0,0.001]	13	13372	6	15272
	[0,0.01]	1197	(1.2×10^6)	516	(1.3×10^6)
	[0,0.1]	117202	(1.2×10^8)	49943	(1.3×10^8)
LISA	e_i	$\mathcal{M} [M_\odot]$		$\mathcal{M} [M_\odot]$	
		=31.383	[31.383,31.391]	=100.80	[100.80, 100.88]
	=0	1	2070	1	3080
	[0,0.001]	12	6857	5	10240
	[0,0.01]	1020	(5.8×10^5)	475	(9.7×10^5)
	[0,0.1]	100403	(5.7×10^7)	44867	(9.2×10^7)

同一量级，说明其对参数的区分能力比天琴稍弱，也进一步说明天琴对这一类源的探测更具优势。注意，这里的结论和上一节 FIM 给出的结果略有差别，因为 FIM 给出的结果和信噪比相关，而模板库选取的是归一化模板，因此不随信噪比变化。

为了进一步验证我们生成的模板数大小，我们使用式(3-18)来估计理论上最小模板数，即

$$N_T = \frac{1}{(2\sqrt{(1-M)/N})^N} \int_{\Omega(\lambda)} \sqrt{\det \hat{\Gamma}_{\mu\nu}} d\lambda,$$

注意，这里与 Ewing 等人^[108]使用的公式相差了一个系数 $(2/\sqrt{N})^N$ ，考虑到这个公式仅作为量级估计，对低维度的情况并不会产生显著影响。我们以天琴探测器的情况为例，最终计算结果如表5-4所示。同表5-3中结果相比较，可见所有结果基本处于同一量级，证明了我们生成结果的可靠性。

表 5-4 天琴探测器情况下模板库大小的理论预估

	GW150914-like		GW190521-like	
e_i	$\mathcal{M} [M_\odot]$		$\mathcal{M} [M_\odot]$	
	=31.383	[31.383,31.391]	=100.80	[100.80, 100.88]
=0	1	178	1	1611
[0,0.001]	16	5665	7	19430
[0,0.01]	1548	5.4×10^5	643	1.9×10^6
[0,0.1]	115186	4.0×10^7	59875	1.8×10^8

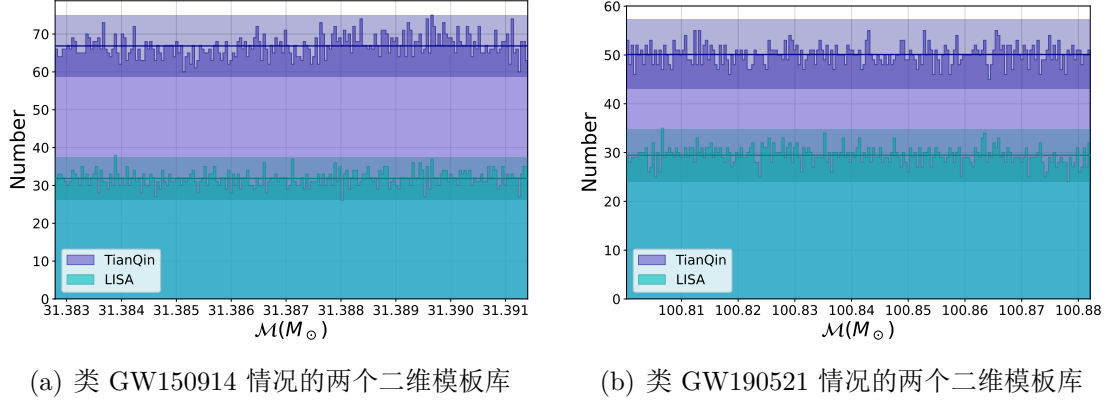


图 5-2 模板库的啁啾质量分布情况。这里选取了表5-3中四个二维模板库作为例子 (即 $\mathcal{M} \in [\mathcal{M}_0 - 10\sigma_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}_0 + 10\sigma_{\mathcal{M}}], e_i \in [0, 0.001]$ 情况)。直线和周围阴影区间表示了均匀分布假设下直方图每个箱的高度和对应的符合 Poisson 分布的浮动范围。

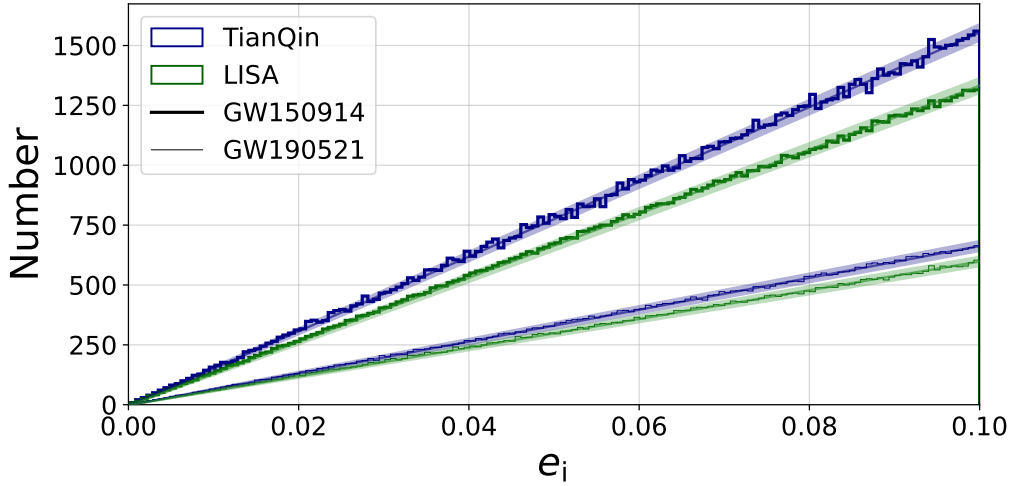


图 5-3 模板库的偏心率分布情况。这里选取的是表5-3中 $e_i \in [0, 0.1]$ 时四个只含偏心率的一维模板库作为例子。直线和周围阴影区间表示了 e^2 累积分布假设下直方图每个箱的高度和对应的符合 Poisson 分布的浮动范围。

此外，我们还计算了生成的模板库中啁啾质量和偏心率参数在参数空间的分布情况，如图5-2和5-3所示。对于啁啾质量 $\mathcal{M}$ ，可以看到所有情况都是呈均匀分布。虽然空间探测器对于啁啾质量可以给出更高精度的测量，地面探测器网络给出的这样一个先验质量范围仍然是一个非常窄的范围，因此均匀分布是一个合理的结果。而对于偏心率，可以看出其按照 e^2 累积分布，该结果与前人工作中的理论估计相符合^[81]。那么基于已知的分布假设，我们可以算出直方图中每一个箱里预期的模板数量 ζ_i ，并且其浮动范围服从 Poisson 分布，则该范围可以写为 $[\zeta_i + \sqrt{\zeta_i}, \zeta_i - \sqrt{\zeta_i}]$ 。

我们将该信息同样展示在了图5-2和5-3中，可以发现该假设很好地解释了我们的结果，进一步验证了结果的合理性。

然而，表5-3展示的所有情况并没有计算完全。这是由于随着参数空间增大，计算消耗将会越高，特别是由于考虑偏心率以后的复杂度陡增。首先，不同于地面探测器可以直接使用原始波形生成模板库，空间探测器需要考虑随时间变化的天线响应。尤其考虑偏心率谐频时，计算速度比无偏心率情况慢约一个量级，因为每一个谐频都要分别计算响应再加和。例如天琴的 $e_i \in [0, 0.1]$ 的一维模板库有 $\mathcal{O}(10^5)$ 个模板，这样的模板库运行需要 $\lesssim 80$ 核时，除此以外还需要 $\lesssim 100\text{GB}$ 内存用以缓存波形。因此，我们把 $e_i = 0.1$ 作为当前由于计算资源限制导致的空间探测器可探测偏心率的上限（如图5-4）。

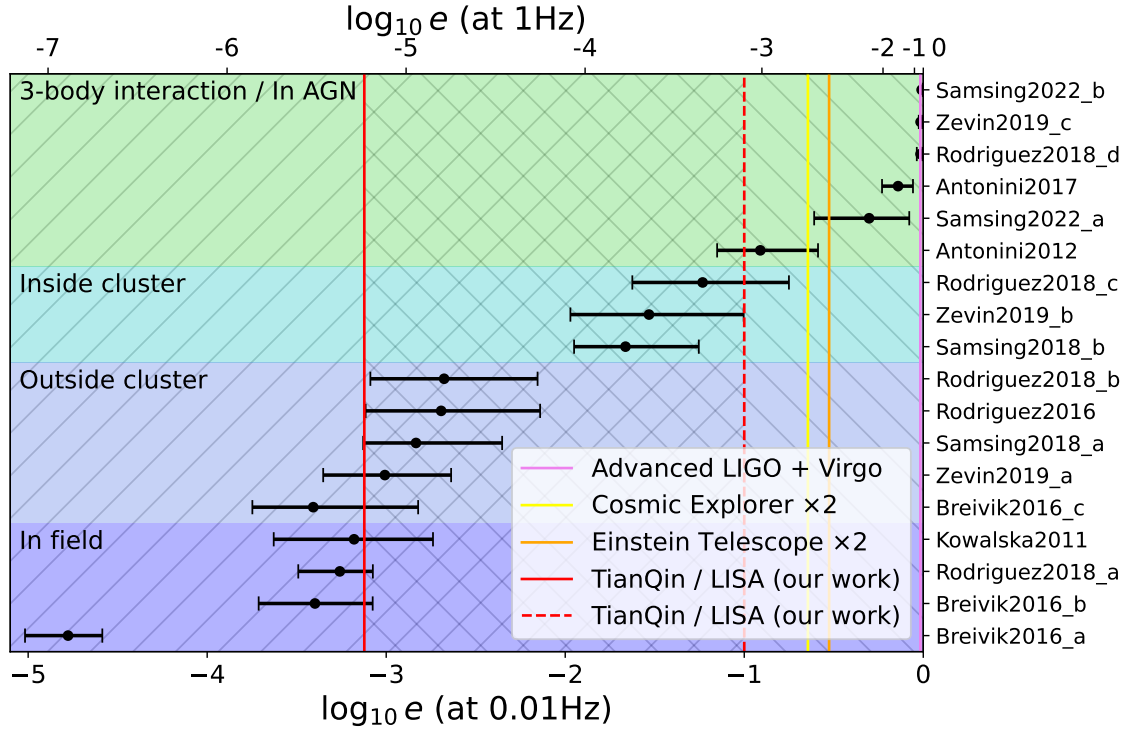


图 5-4 不同模型下恒星级双黑洞轨道偏心率的分布情况（同图2-1）。这里我们增加了红色实线以代表本课题得出的空间引力波探测器可探测最小偏心率。红色虚线代表由于计算资源的限制，本课题所能生成的模板库偏心率范围的上限（详见正文）。图中所有的偏心率大小均统一转换成在引力波频率 0.01Hz（下轴）或 1Hz 时（上轴）对应的偏心率（见式(2-32)）。

鉴于参数的分布情况符合理论预期，我们可以根据现有结果给出合理的全二维档案搜索空间模板库大小预期，如表5-3中带括号的数值所示。例如 $\mathcal{M} \in$

$[31.383, 31.391]$, $e_i \in [0, 0.1]$ 情况下, 模板数预期量级约为 $\mathcal{O}(10^8)$ 。诚然, 这种将两个一维情况的预期模板数直接相乘的做法会相对高估模板数的大小, 但在量级上并不改变已有的结论, 即模板库生成在计算资源上依旧面临挑战。特别地, 如果考虑 EccentricFD 波形的最大偏心率适用范围, 即 $e_i \in [0, 0.4]$, 模板数将预期达到 $\mathcal{O}(10^9)$ 。对应地计算这样的模板库预期需要 $\sim \mathcal{O}(10^6)$ 核时以及 $\sim \mathcal{O}(10^5)$ GB 的内存, 因此将会带来显著的计算负担。

介于考虑偏心率参数时在模板库生成时存在的计算上的挑战, 我们接下来将分别证明偏心率参数存在的必要性和该模板库结果的有效性。

5.2.2 偏心率参数必要性检验

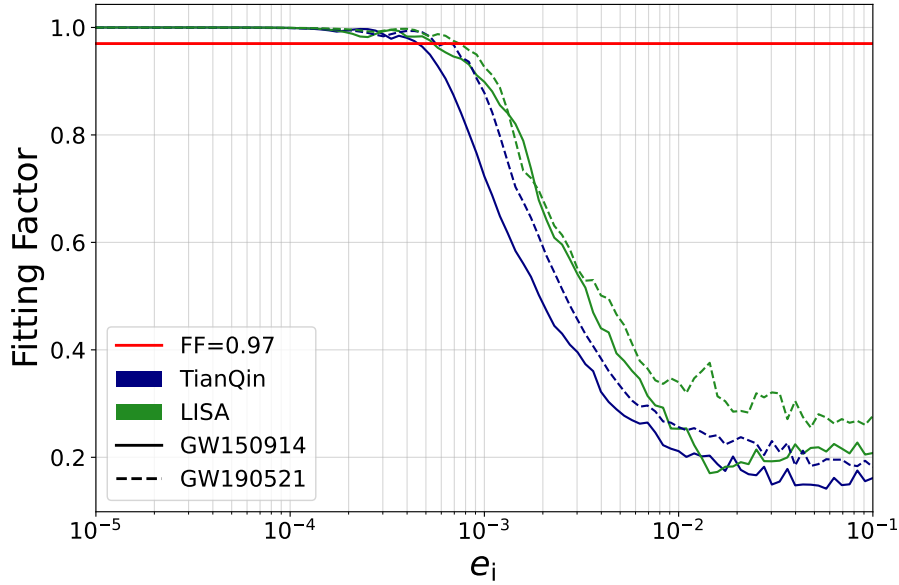


图 5-5 不同偏心率的波形与无偏心率模板库匹配因子分布。红色线对应模板库的最小匹配阈值 0.97, 当匹配因子低于该值就说明探测器将足以区分含该偏心率与无偏心率的波形。

为了具象化显示考虑偏心率的必要性, 我们使用带不同偏心率, 其余参数相同的波形, 与无偏心率的模板库匹配, 如图5-5。我们使用了表5-3中仅含啁啾质量时的四个模板库, 然后分别计算不同偏心率情况下的信号与对应模板库的匹配因子。因为模板库中偏心率被认为是 0, 因此偏心率越大, 错配程度就越高。总之, 当 $e_i \sim 5 \times 10^{-4}$ 时, 天琴或 LISA 就足以将其与无偏心率的情况区分开, 我们也因此把这个值作为空间探测器可以区分的最小偏心率 (如图5-4)。从图中可以看到, 这个值在天体物理学上是一个非常小的偏心率值, 因此偏心率参数在未来的探测和测

量中是不可或缺的。另外，图中很多模型下预言的偏心率大小都比这个值要高，也验证了空间探测器对偏心率的探测能力。

同时我们也探究了由于偏心率的偏差造成的对啁啾质量本身的估计偏差。显然，随着偏心率偏差的增大，啁啾质量的偏差也会变得显著， $e_i = 0$ 时只有 $\lesssim 10^{-6} M_\odot$ ，而 $e_i = 0.1$ 时就变成了 $\sim 10^{-3} M_\odot$ 。需要注意的是，这个啁啾质量范围是已经由档案搜索所限制的范围，如果放到全参数空间，这个偏差将会更大。由此也说明了不加入偏心率将会带来严重的系统误差，这在后续的数据处理中是不可忽略的。

5.2.3 模板库的有效性检验

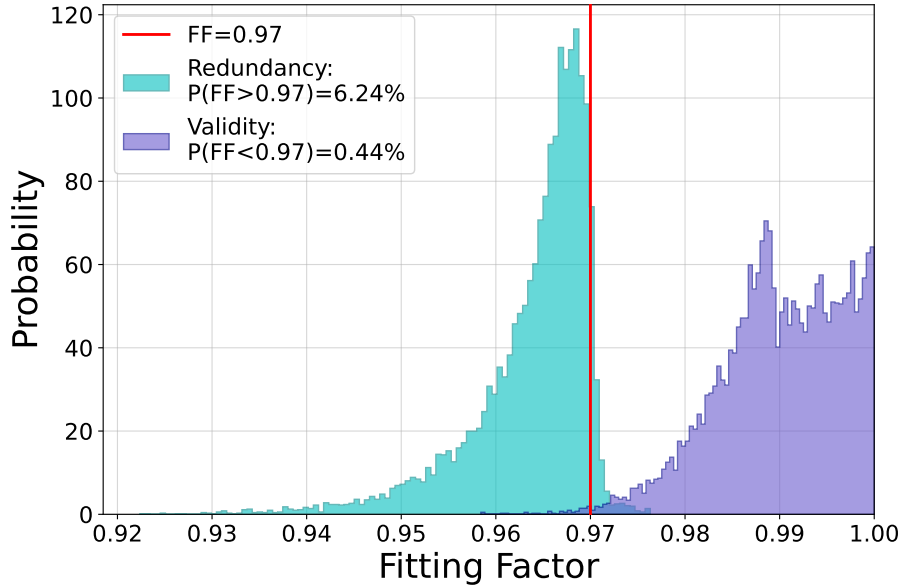


图 5-6 模板库的有效性与冗余度检验，详见正文。这里选取的是天琴情况下类 GW150914 源的二维模板库，即对应表5-3中含 13372 个模板的情况。

为了进一步检验生成的模板库是否有效，我们分别做了有效性与冗余度检验。我们随机生成了 10000 个参数在对应模板库参数范围内的测试波形，然后计算这些波形与模板库的匹配程度。如果一个模板足够有效，那么几乎所有测试波形预期都将有至少一个模板与其匹配程度大于最小匹配阈值 ($M = 0.97$)。如图5-6所示，我们给出了 10000 个测试波形匹配因子的直方图。红色竖线表示阈值 $M = 0.97$ ，可以看到只有 0.44% 的情况匹配因子低于 0.97，说明该模板库是有效的。

另一方面我们计算了模板库里每个模板之间的匹配程度。理论上，如果一个模板库不存在冗余的模板，所有的匹配结果都将小于最小匹配阈值 ($M = 0.97$)。如

图5-6所示，我们给出了每个模板的匹配因子的直方图。注意这个匹配因子的定义中不包含模板和它本身的匹配。可以看到只有 6.22% 的模板是冗余的，因此并不会造成过多的额外计算成本。

以上，我们证明了模板库大小的计算结果是合理的。这不仅是一个有效的模板库，可以保证几乎所有在参数空间范围内的信号都被匹配到，而且模板库的冗余度非常低。其他模板库的计算结果也基本相似，符合该结论，因此不再一一展示。也就是说，我们没有过度高估或低估模板库的大小，前文提到的一系列结论，特别是在计算资源上的讨论依旧成立。

5.3 信噪比阈值与探测率估计

匹配滤波实例分析 有了可靠的模板库生成程序，我们可以开始对一简单示例进行实际的匹配滤波。考虑 LISA 中类 GW150914 的 $e_i = 0.1$ 的源作为注入源，并叠加基于 TDI-A 通道 PSD 的 Gaussian 噪声。出于计算量的考虑，我们取一年的探测时长（即并合前一年到并合时刻），因此为了信号有足够的信噪比，取光度距离 100Mpc。随后我们生成 $e_i \in (0.099, 0.101)$ 的一维波形模板库，共计 1262 个模板，对模拟信号进行匹配滤波。

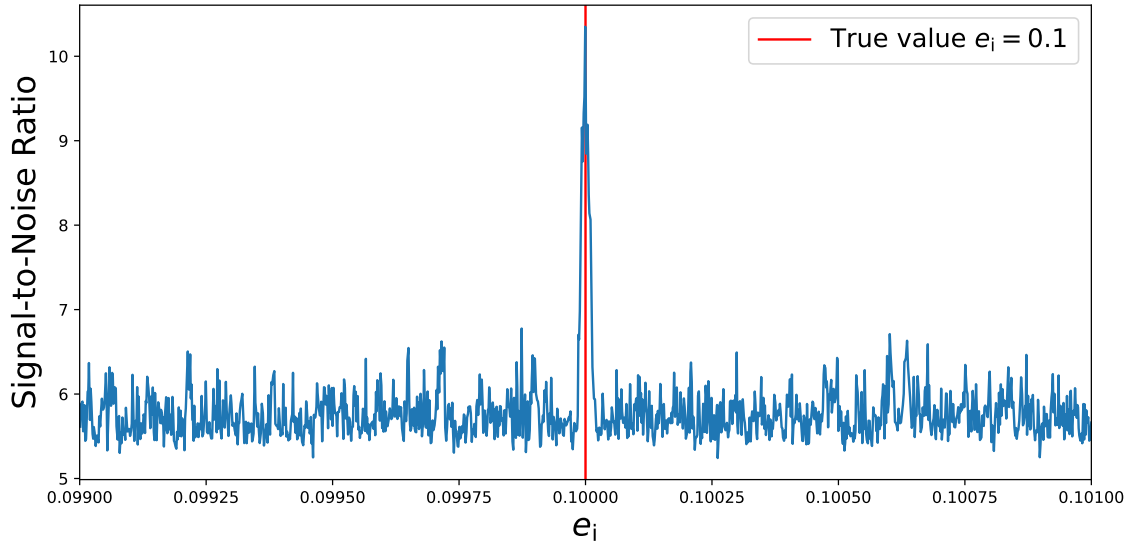


图 5-7 示例模拟事件的匹配滤波搜索结果。可以看到信噪比峰值非常接近注入的真值，成功搜寻到了该信号。

每一个模板在匹配滤波时都将自动进行时间平移，得到信噪比的时序曲线。对于模拟信号的匹配结果，我们取每一个模板得到的最大信噪比，如图5-7所示。可以

看到模板中距离真值最近的 ($e_i = 0.09999946$) 匹配到了最高的信噪比, 成功探测到了注入信号。

实际匹配滤波探测过程与生成模板库不同, 在生成模板库时, 只需要通过一系列内积积分来计算匹配因子, 因此, 我们可以在保证内积计算精度的前提下, 采用更稀疏的频率序列计算内积。在 `sbank` 程序中, 我们自动判断频率序列的稀疏程度, 直到内积结果收敛, 因此显著提升了计算速度。而实际的引力波信号是以探测器采样频率为基准的, 根据 Nyquist 采样定理, 这个频率一般是探测器频率上限的二倍, 具体到空间探测器, 对于天琴取 2Hz, 对于 LISA 则一般取 0.2Hz。因此, 如果考虑五年的观测时长, 数据长度将高达 $\mathcal{O}(10^8)$, 即便对于 LISA 也少了一个量级。这也是我们在上面的示例中选取稍短观测时长的原因, 类似的选取也会在下一章节的处理中使用。

显著度分析 为了实际分析探测器的噪声统计特性, 我们继续利用以上示例, 对噪声进行显著度分析, 首先我们需要计算 p 值 (p-value)。我们生成只有 Gaussian 噪声不含注入信号的模拟数据, 并采用相同的模板库进行匹配滤波。因此所有的信噪比结果无论大小均由噪声产生。我们将每一个模板在匹配滤波时获得的信噪比序列汇总排序, 从而得到信噪比的生存函数 (Survival Function), 即 $SF = 1 - CDF$, 其中 CDF 为信噪比的累积分布函数 (Cumulative Distribution Function)。假设数据长度为 N , 在理想情况下, 每个模板利用时间平移方法可以产生 $2N$ 次匹配结果。整体上, 所有模板加起来的匹配次数为 $2N \times N_T$, 但由于我们始终都在针对一个数据长度为 N 的事件探测, 因此对于该事件的 p 值可以定义为

$$\text{p-value} = SF_{\text{SNR}} \times \frac{2N \times N_T}{N}, \quad (5-1)$$

该 p 值用于评估在仅有噪声存在的条件下, 产生与候选信号相同或更高信噪比的概率。需要指出的是, 由于模板之间存在相关性, 以及时间平移时数据在时域上的相关性, 实际独立的匹配次数要更低, 这里只是给出一个 p 值的大致估计。

如图5-8所示, 我们展示了信噪比与 p 值关系的计算结果, 显然, 信噪比越大, 该信号完全由噪声产生的概率就越低。在仅含噪声的情况下, 由于 Gaussian 噪声假设, 其生存函数 (以及由此计算的 p 值) 呈现 Rayleigh 分布, 在半对数坐标下呈现二次函数曲线形状, 符合理论预期。而由于大部分信噪比都堆积在小信噪比处, 我们在图中只画出了较高信噪比的尾部。为了对比, 我们将含信号情况下的情况也画在了图中。需要注意的是, 实际意义上的 p 值指的是在只有噪声存在的条件下产生极端结果的概率。数据中存在信号时, 所谓对背景的统计分析会出现偏差, 整体背景分布向更高信噪比的尾部倾斜, 从而使得 p 值评估变得不再准确。

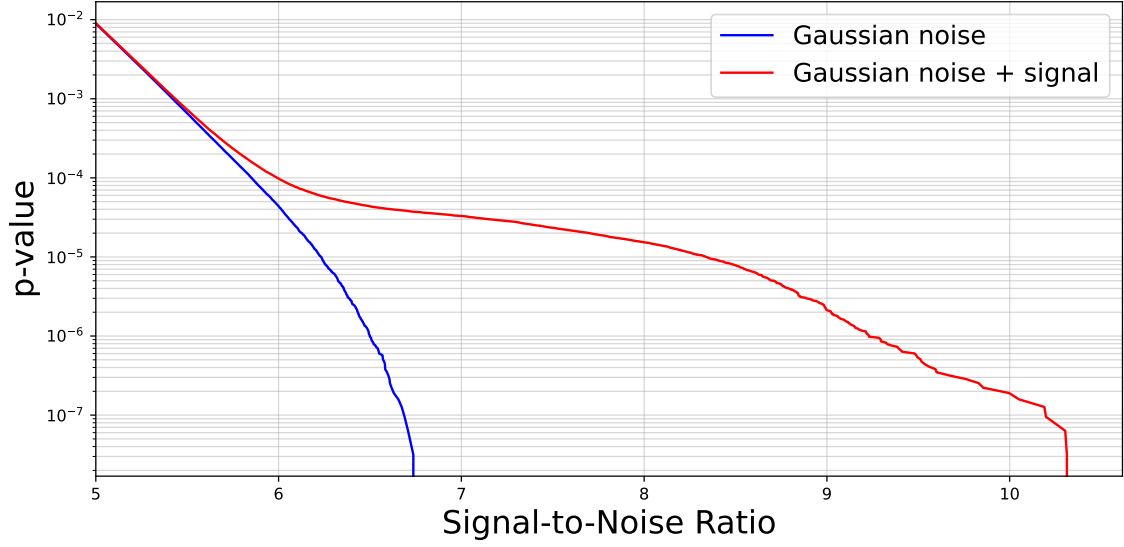


图 5-8 示例事件条件下信噪比与 p 值的对应关系。红线代表模拟信号中包含注入源，蓝线代表模拟信号只含 Gaussian 噪声。

p 值为信号的显著度提供了重要指标。在实际数据处理中，将根据实际情况设置 p 值阈值，并认为低于此 p 值的事件是显著的。p 值阈值与所允许的误警率密切相关，因而影响信噪比阈值的选取。接下来我们将简要估算档案搜索情况下的信噪比阈值。

信噪比阈值分析 有了上一节模板库大小的估计，我们可以给出档案搜索下空间探测器的信噪比阈值。考虑稳态 Gaussian 噪声假设，探测器的信噪比阈值可以由下式给出^[94]

$$\rho_{\text{thr}} = \sqrt{-2 \ln \frac{\text{FAP}}{A \times N_T}}, \quad (5-2)$$

FAP 为误警率， $A \times N_T$ 是假定所有模板均相互独立时模板库的大小。但是，实际生成的模板不可能完全独立，且考虑到我们选择的最小匹配程度是 $M = 0.97$ ，这种情况下的模板是高度互相关的，因此我们这里加入了一个修正因子 A 。为了方便与前人的工作^[94, 108] 相互比较，我们这里临时地取 $A = 1$ 。目前，地面探测器考虑的典型探测阈值为 $\text{FAP} \sim 10^{-3}$ ，而考虑到本课题的结果，即预期档案搜索模板库大小将为 $N_T \sim \mathcal{O}(10^8) - \mathcal{O}(10^{10})$ ，那么对应地有 ρ_{thr} 将最高达到 7.12。之前的研究中由于没有考虑偏心率，导致前人的结果 $\rho_{\text{thr}} \sim 5$ 相比我们的 $\rho_{\text{thr}} \sim 6 - 7$ 结果更加乐观^[108]。

事实上，因为在此情况下模板之间是高度互相关的，所以上文提到的这些信噪比阈值仍然是一个保守估计。除此以外，FAP 在档案搜索情况下应有适当抬高，这

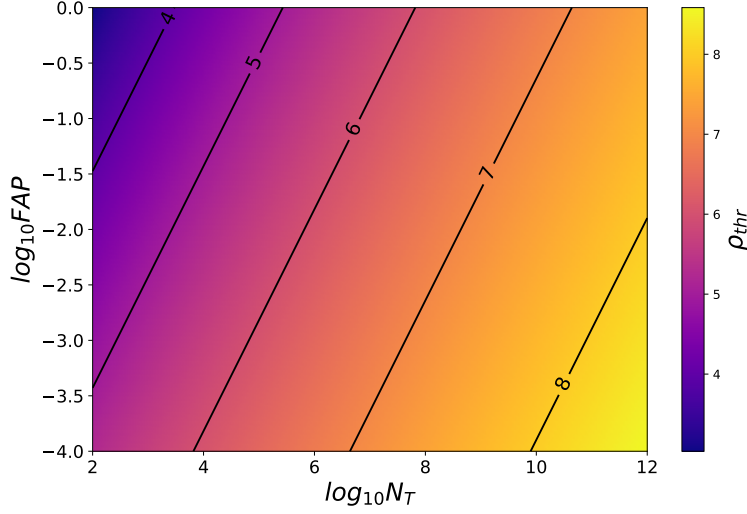


图 5-9 由式(5-2)估算出的信噪比阈值与模板数和 FAP 的相关关系（此处取 $A = 1$ ）

是因为地面已探测到该事件本身将提高该事件的可信度，但其对信噪比的改变较小。图5-9展示了基于式(5-2)，信噪比阈值与模板数和 FAP 的相关关系。

探测率分析 一个引力波探测器在指定观测时长范围内的总探测数量也与信噪比阈值高度相关。基于已公布的引力波事件原表 GWTC-3^[38] 中恒星级黑洞的质量分布信息，Seto 和 Kyutoku 提供了一种估算总探测数的方法^[197]：对于天琴和 LISA，均有

$$N_{\text{tot}} \sim 2(T/4\text{yr})^{3/2}(\rho_{\text{thr}}/10)^{-3}, \quad (5-3)$$

虽然该公式使用准圆轨道波形计算得出，其在偏心率 $e_{5\text{mHz}} \sim 0.05$ 时仍然不会有显著差别，因此也适用于低偏心率情况下的估计。通过使用该公式作为参考估计，考虑由于偏心率的引入，档案搜索信噪比阈值从 ~ 5 提高到本课题的 ~ 7 ，总探测数 N_{tot} 会从 ~ 22.4 降到 ~ 8.1 。但如果考虑全参数空间的信噪比阈值 $\rho_{\text{thr}} \sim 15$ ^[94]，总探测数将只有 ~ 0.83 。因此，相比于全参数空间，档案搜索将显著降低空间探测器所需的信噪比阈值，提高恒星级双黑洞的探测数量，有利于对系统物理特征的进一步探究。

5.4 本章小结

在这一章中，我们给出了完整的空间探测器波形模板库生成流水线，并对空间探测器的匹配滤波探测给出了进一步讨论。

首先，我们通过 FIM 评估了地面探测器网络和空间探测器的探测能力并对比

讨论,发现除了偏心率以外,空间探测器可以在地面探测器基础上进一步限制精度的参数只有啁啾质量,与前人工作结论相符。

随后我们通过增改只适用于地面探测器的模板库生成程序 `sbank`,使其支持空间探测器情况的计算,并据此生成了不同参数空间下的模板库。通过分析这些模板库的参数分布情况、模板库大小与理论估计值的对比以及评估模板库的有效性和冗余度,我们多方面验证了结果的可靠性和实用性。此外,我们还指出了虽然档案搜索参数空间已经足够小了,但当引入偏心率参数以后,其模板库大小会在量级上猛增,在计算资源上带来极大的挑战。因此我们评估了偏心率参数的必要性,发现天体物理学意义上非常小偏心率的情况,空间探测器仍然有能力区分这样的参数,证明了空间探测器对偏心率的探测能力,也说明偏心率在未来的空间探测中不可或缺。

随后我们通过一个简单示例实际进行了匹配滤波过程,并探究了该情况下的 p 值情况。最后我们根据已有的结果重新给出了档案搜索条件下的信噪比阈值及探测率估计。

接下来我们将移步信号的测量部分,对档案搜索得到的信号进行参数估计。

第 6 章 基于档案搜索的信号测量

根据我们在图1-4所描述的，在通过档案搜索从空间探测器中获得信号以后，我们将结合地面探测器已有的参数估计结果，对该信号给出进一步的限制估计。由于空间和下一代地面探测器均尚未运行，因此我们将以类 GW190521 源为例，针对该模拟信号进行多方位的参数估计。

需要指出的是，空间探测器的实际观测数据还会包含来自超大质量黑洞合并和双白矮星等多种天体源的引力波，这些信号可能与目标恒星级双黑洞信号发生混叠。本研究中为简化分析，所采用的模拟数据仅包含目标恒星级双黑洞系统的信号。

PyCBC Inference 是 PyCBC 中专门用于引力波参数估计的模块，集成了多种似然函数模型，并支持 emcee、dynesty、nessai 等多种采样器的接口。在本章中，我们将使用该模块进行参数估计分析。

6.1 地面探测器网络的参数估计

正如上一章所提到的，通过 FIM 进行参数估计只能给出参数的不确定度范围，而无法给出测量参数的概率分布。因此，我们首先需要假设存在下一代地面探测器网络的数据，通过贝叶斯推断得到该情况下的参数估计。

为了考虑更加实际的情况，我们考虑两个 CE 探测器分别位于经纬度 $(-125^\circ, 46^\circ)$ 和 $(-94^\circ, 29^\circ)$ 的位置，臂长分别为 40km 和 20km，同时更新了各自对应的噪声曲线¹。ET 的配置与上一章保持一致。此外，我们设定 CE 的频率下限为 5Hz，ET 的频率下限为 2Hz，并采用 IMRPhenomXPHM 波形模型。我们将从并合前 254 秒到并合后 2 秒的共计 256 秒的时间范围作为地面探测器的实际分析时间。为了保证信号在空间探测器中有足够高的信噪比，我们取光度距离为 $D_L = 100\text{Mpc}$ 。虽然 IMRPhenomXPHM 波形包含自旋效应，但为了与空间探测器的参数估计保持一致，我此处我们统一假设所有自旋均为 0 且固定不变。我们假设数据包含注入源和基于噪声 PSD 的 Gaussian 噪声，其余注入源参数和先验信息如表6-1所示。

通过使用 PyCBC Inference 模块，我们计算了该系统被下一代地面探测器联合探测时后验概率分布情况，如图6-1所示。可以看到，由于选取的光度距离更近，大部分参数估计精度在量级上比表5-2中的结果更小或相符合。此外，所有的后验概率都呈现类 Gaussian 形状的分布，并且均为单峰。这主要是由于多探测器联合探测，使得参数之间的简并效应显著减弱，更重要的是，下一代地面探测器对于恒星

¹<https://dcc.cosmicexplorer.org/CE-T2000017/public>

级双黑洞的探测能力显著提升，例如对于该源，地面联合探测信噪比估计约为 10^4 ，相比当前地面探测器网络提升了两个量级，因而显著提升了参数估计精度。

我们在接下来的空间探测器的参数估计中，把本节得到的后验概率分布作为已知的结果，将大部分参数固定在该结果中参数的中值位置，对其他参数进行下一步处理。

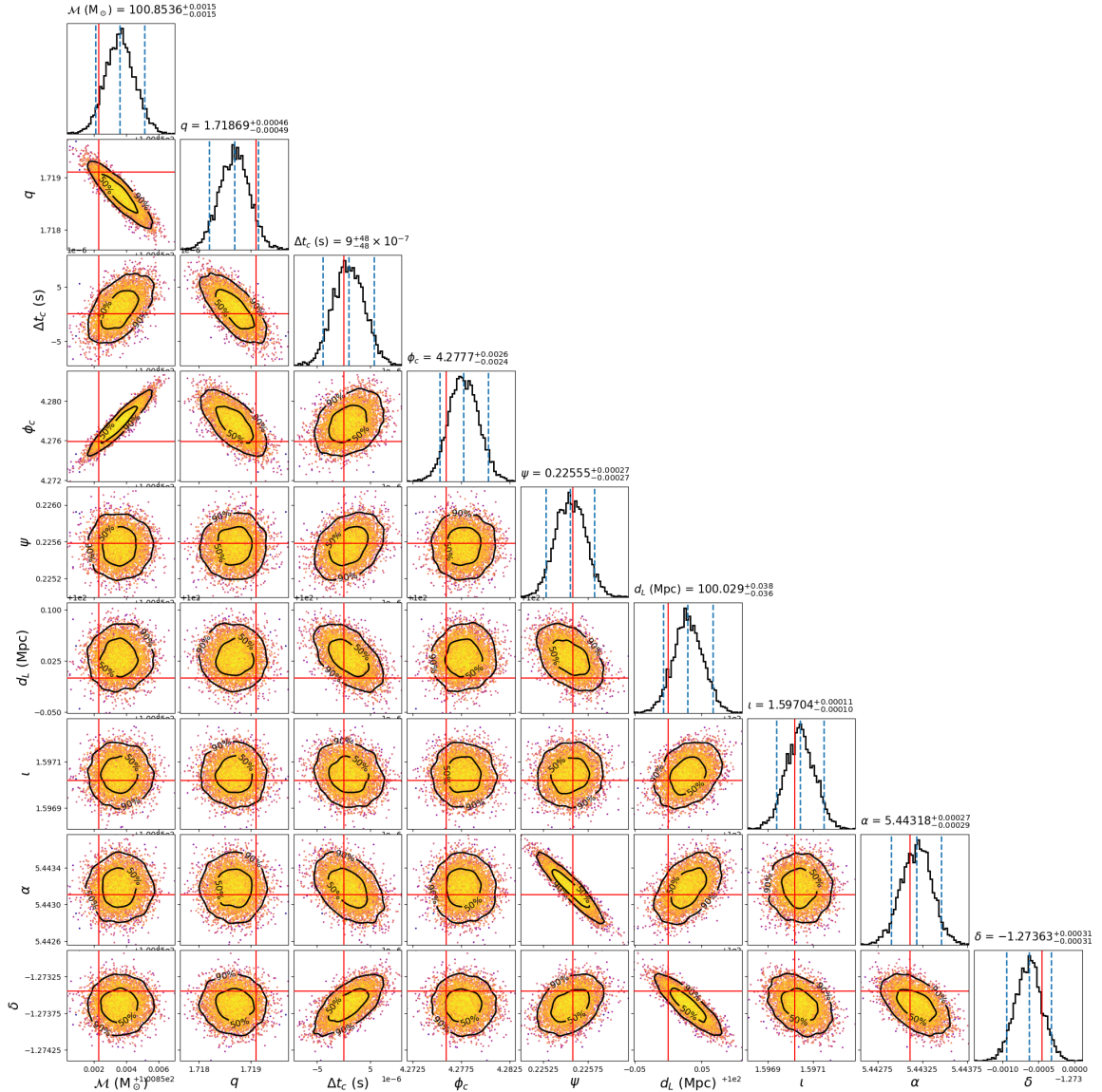


图 6-1 下一代地面探测器联合探测示例源的后验概率分布情况。红色线代表真实值，二维分布图中的等高线表示了 50% 和 90% 置信区间范围，一维边缘分布图中蓝色虚线分别代表中值位置和 90% 置信区间范围。

表 6-1 类 GW190521 注入源的基本信息及地面和空间探测器网络分别的先验范围选取情况。表中质量参数均为探测器系下的质量。Uniform 为均匀分布, UniformRadius 为径向均匀分布, UniformSky 为天空均匀分布, Sine 为正弦分布。空间探测器情况下的固定值和 KDE 分布均由地面探测器的后验概率确定, 详见正文。

	Injected value	Prior	
		ET + dual CE	Space (custom) Space (with KDE)
$m_1 [M_\odot]$	153	-	-
$m_2 [M_\odot]$	89	-	-
$\mathcal{M} [M_\odot]$	100.8523	Uniform(100, 102)	Uniform(100.8, 100.9) From KDE
q	1.7191	Uniform(1, 2)	Uniform(1.6, 1.8)
$D_L [\text{Mpc}]$	100	UniformRadius(10, 1000)	Fixed: 100.029
$\iota [\text{rad}]$	1.5970	Sine(0, π)	Fixed: 1.59704
$t_c [\text{s}]$	4799624.274911478	Uniform($t_c - 0.001$, $t_c + 0.001$)	Fixed: 4799624.274912378
$\phi_c [\text{rad}]$	4.2759	Uniform(0, 2π)	Fixed: 4.2777
$\psi [\text{rad}]$	0.2256	Uniform(0, π)	Fixed: 0.22555
$\alpha \text{ (RA)} [\text{rad}]$	5.4431	UniformSky	-
$\delta \text{ (DEC)} [\text{rad}]$	-1.2735	-	-
$\lambda [\text{rad}]$	5.0372	-	Fixed: 5.03713
$\beta [\text{rad}]$	-0.9115	-	Fixed: -0.91169
χ_{1x}	0	Fixed: 0	-
χ_{1y}	0	Fixed: 0	-
χ_{1z}	0	Fixed: 0	-
χ_{2x}	0	Fixed: 0	-
χ_{2y}	0	Fixed: 0	-
χ_{2z}	0	Fixed: 0	-
$e_{0.01\text{Hz}}$	0 0.1	-	Fixed: 0 Uniform(0.09, 0.11)

6.2 参数估计与方法测试

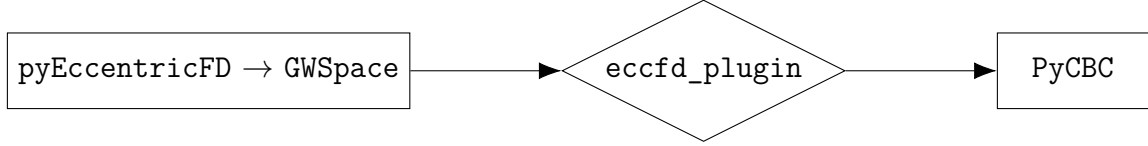


图 6-2 通过 `eccfd_plugin` 实现 PyCBC 对空间探测器参数估计的支持

我们首先通过 PyCBC 的插件功能，将结合空间探测器响应的 EccentricFD 波形通过 GWSpace 计算以后利用插件接入 PyCBC Inference，再结合 PyCBC 已经包含的噪声 PSD 信息，实现其对空间探测器情况下含偏心率信号的参数估计支持。

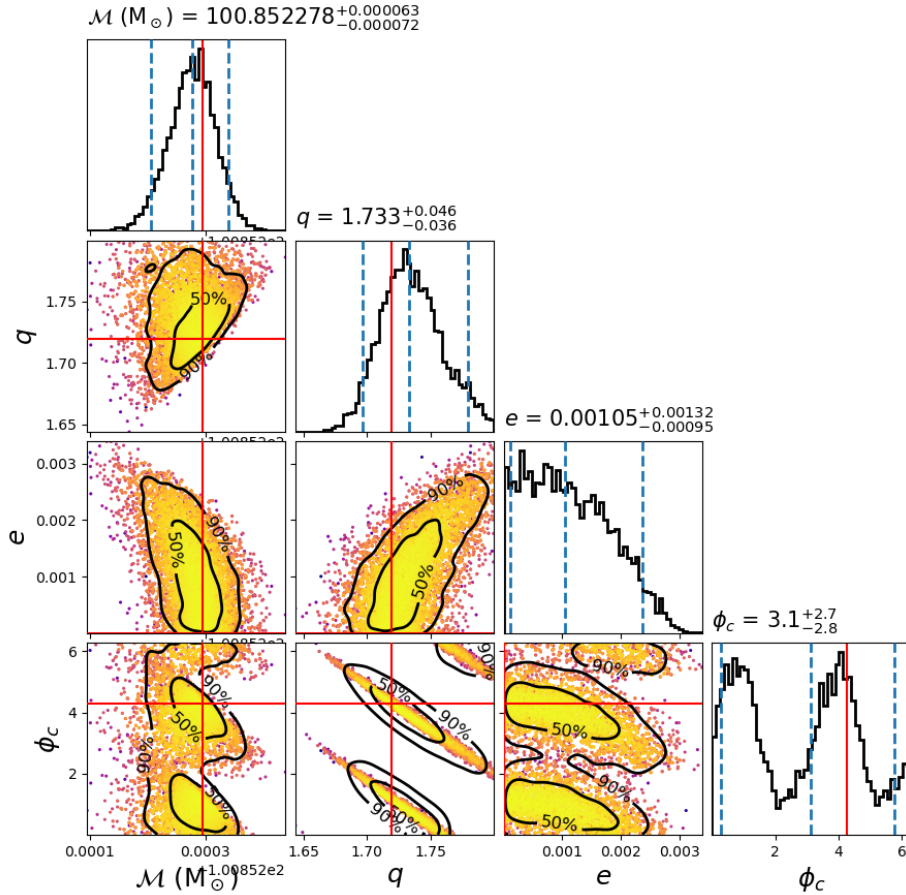
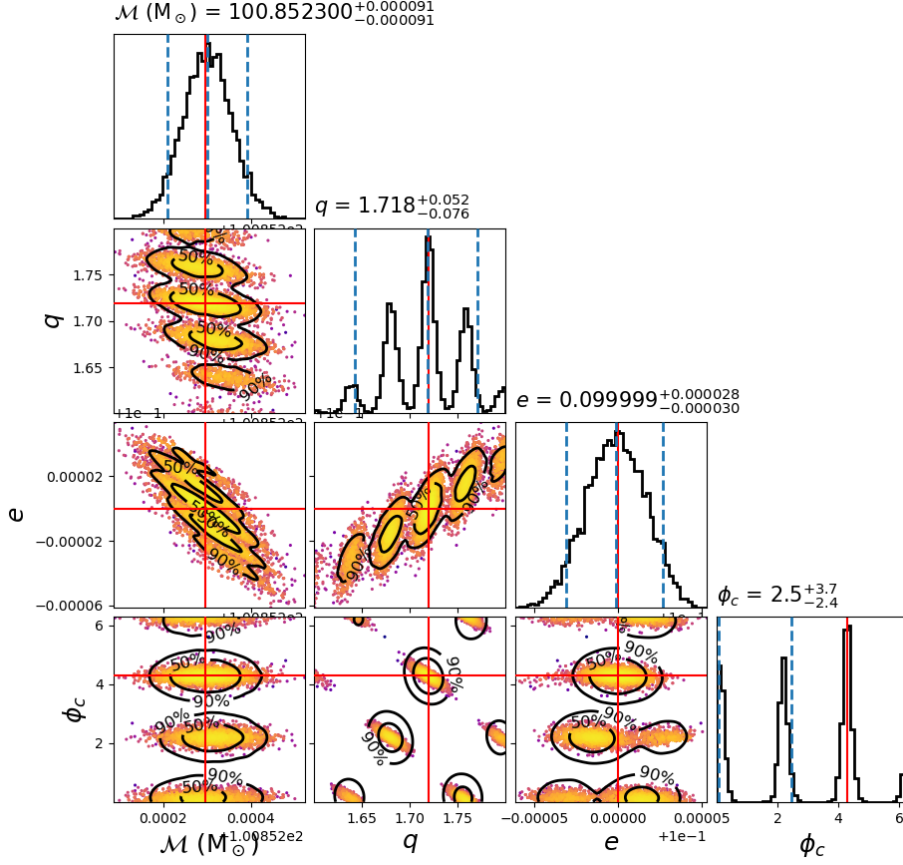


图 6-3 零噪声假设下，使用外差似然方法和 `dynesty` 采样器，计算 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 时的参数估计测试结果。红色线代表真实值，二维分布图中的等高线表示了 50% 和 90% 置信区间范围，一维边缘分布图中蓝色虚线分别代表中值位置和 90% 置信区间范围。


 图 6-4 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时的测试结果，其余与图6-3相同。

为了测试我们整合程序的有效性，我们使用 `dynesty` 采样器，取活跃点 1000 个，并通过贝叶斯证据 Z 定义程序停止判据 $d \log Z = 0.1$ ，同时我们选取了与地面探测器情况相同的较宽质量范围的均匀分布作为先验，即 $\text{Uniform}(100, 102) M_\odot$ 。出于计算量的考量，我们取总观测时长 $T_{\text{obs}} = 1\text{yr}$ ，考虑 LISA 探测器场景，高频截断为 0.1Hz ，并使用外差似然估计的似然函数模型。在本章中，我们展示的均为探测器总参数估计结果，即综合了 A, E, T 三个 TDI 通道的参数估计计算结果。

需要注意的是，外差似然估计模型需要有一组固定参数用来生成基准波形（详见式3-28），因此我们将上一节得到的参数估计结果作为该组参数值以及所有未采样参数的固定值。由于我们假设地面探测器不提供任何偏心率参数限制，因此对于基准波形的偏心率参数，我们取注入值。此外，我们可以通过边缘化相位参数以进一步减少复杂度，提升计算速度，但为了探究相位与我们关注的参数可能存在的相关关系，我们暂时关闭了该选项。因此，并合相位 ϕ_c 将同时作为需要采样的参数，我们以它的物理边界作为其先验范围，即 $\text{Uniform}(0, 2\pi)$ 。

最后，我们之前使用的偏心率参数定义在信号的初始位置，即初始偏心率由初

始频率定义, 该频率由观测时长决定, 即 $f_i = (5/256)^{3/8} \pi^{-1} \mathcal{M}^{-5/8} T_{\text{obs}}^{-3/8}$ 。然而, 实际参数估计时, 特别是涉及加速运算的似然函数模型, 在计算的过程中起始频率的选取会出现变化。因此, 在本章节中, 我们统一将偏心率定义在 0.01Hz 处。

在数据不含噪声的假设下, 最终的测试结果如图6-3和6-4所示。可以看出, 在零噪声假设下, 含偏心率与否的参数估计结果均成功还原了注入值。首先, 对于无偏心率的情况, 为了测试参数间的相关关系和低偏心率时参数估计的行为, 我们在此处将偏心率也作为采样参数, 先验范围为 $\text{Uniform}(0, 0.02)$ 。由于注入源不含偏心率, 因此偏心率的一维分布向零端倾斜, 但由于注入值出于边界, 因此该参数的估计上存在一定偏差。通过观察啁啾质量和偏心率的半月形二维分布可以发现, 偏心率和啁啾质量存在一定的简并关系, 这一点也与前人的参数估计或理论近似相符[74, 198, 199]。并合相位在这里呈现 π 周期性, 这是因为在只考虑引力波的主模时, 波形中相位部分的形式类似于 $\exp(2\varphi)$, 因此符合理论预期。而同时需要注意到, 质量比和并合相位存在较强的简并关系, 可能的原因是质量比会显著影响相位的演化, 进而对并合相位的测量产生影响。由于本课题主要关注含偏心率的信号处理, 因此在接下来的分析中, 我们将不再针对无偏心率注入信号的情况对偏心率参数采样。

含偏心率的测试结果除了无偏心率时存在的相关关系以外, 还出现了更多的结构。如图6-4, 质量比的分布出现了显著的多峰结构, 而并合相位则出现了三个峰。通常并合相位的周期性和简并关系与其同极化角的耦合有关, 但这里极化角是固定的, 并未参与采样。加之质量比出现了显著的多峰, 这可能是由于偏心率谐频的引入导致相位项出现了更复杂的特征, 谐频之间更容易出现混淆, 进而浮现出了新的简并关系。

由于这里我们使用了外差似然来加速计算, 为了确保上述结构不是外差所导致的, 我们使用基本的 Gaussian 似然函数模型重新计算以上示例。由此, 所有的计算都将按照原始的采样频率计算, 即 0.1Hz, 对应的数据长度将近百万, 而不是像外差似然一样通过只有上千个点的稀疏的频率序列来计算。因此考虑到计算资源的限制, 我们相比上文缩小了质量的搜索范围 (如表6-1所示)。我们观察到, 在此情形下使用 `dynesty` 采样器时, 其收敛速度较慢且后验分布呈现出较为松散的特征。为提高层级采样效率, 我们改用 `nessai` 采样器。在后续讨论中, 我们将继续采用 `nessai`, 并固定活跃点数为 1000 个, 停止判据 $d \log Z = 0.1$ 。

我们首先使用了 `nessai` 采样器对外差似然情况做了重新计算, 结果与图6-3和6-4几乎一致, 因此不再额外展示。这样对应地排除了由采样器本身造成的采样偏差问题。随后我们计算了 Gaussian 似然函数模型下的结果, 如图6-5和6-6所示。

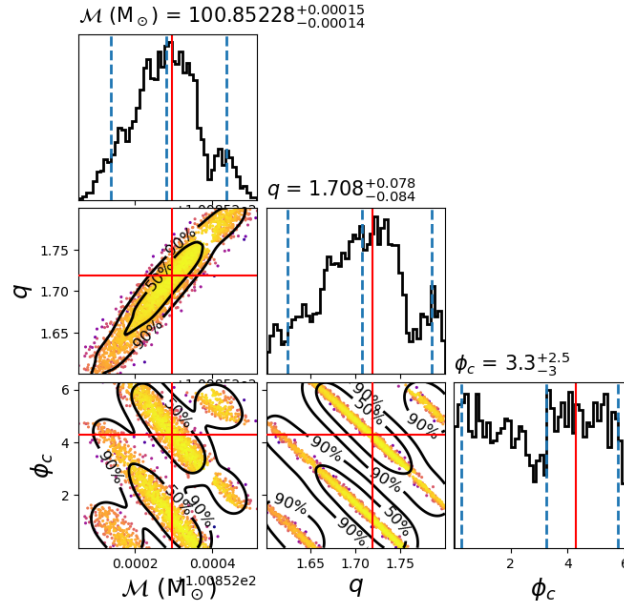


图 6-5 零噪声假设下, 使用 Gaussian 似然函数和 nessai 采样器, 计算 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 时的参数估计测试结果, 其余条件与图6-3相同。

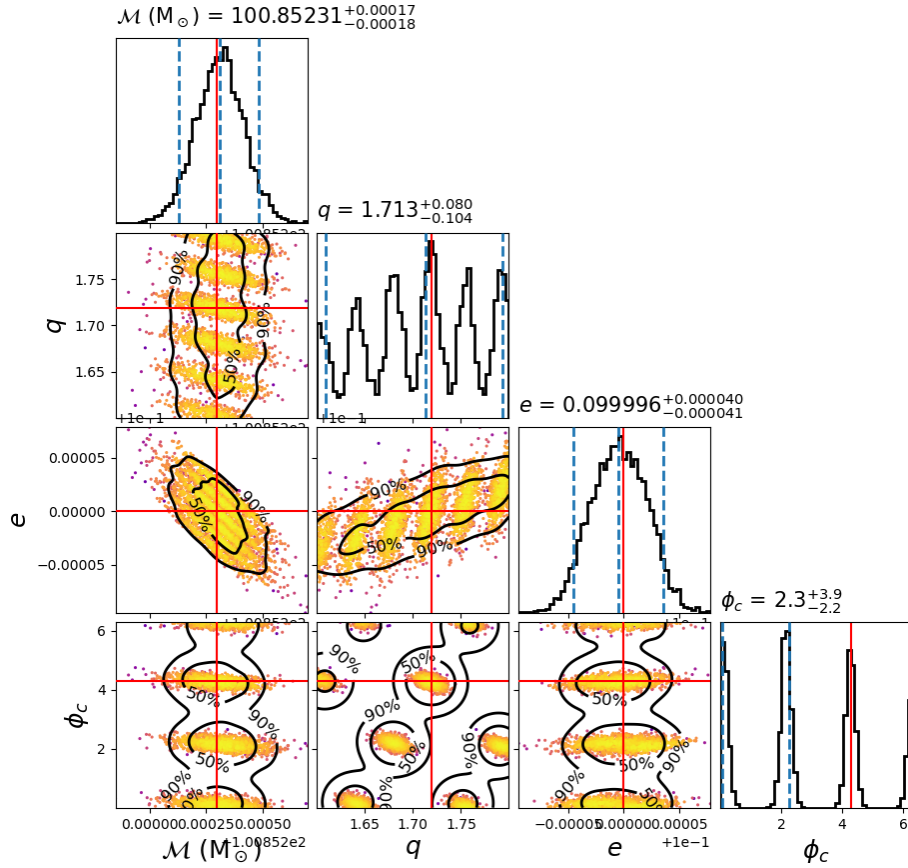


图 6-6 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时的测试结果, 其余与图6-5相同。

通过与之前的测试对比，可以看到，质量比和并合相位的多峰结构与简并特征是引力波信号物理上所具有的，而非参数估计模型造成的偏差。与此同时，由于 Gaussian 似然函数情况下的详细计算，所得到的后验概率相比之前的结果在边缘处延伸出了更多的细节，因此后验概率的置信范围相对较宽。在下一节，我们将结合地面探测器的概率分布，提供更具体的质量先验范围，进而得到更实际的结果。

6.3 参数估计结果

6.3.1 核密度估计与先验范围

在上一节中，我们讨论了不同似然函数和采样方法的测试结果，最终确定使用 Gaussian 似然函数并采用 `nessai` 采样器做计算。针对质量参数，为了测试目的，我们手动设定了一个较宽的啁啾质量和质量比范围。然而，地面探测器给出的结果实际上是一组多维的概率密度分布，而不仅仅是单个参数的取值范围或简单的上下限。因此，我们可以直接从后验概率中提取出完整的多维分布函数，并将其用作空间探测器注入的先验信息（如表6-1所示）。

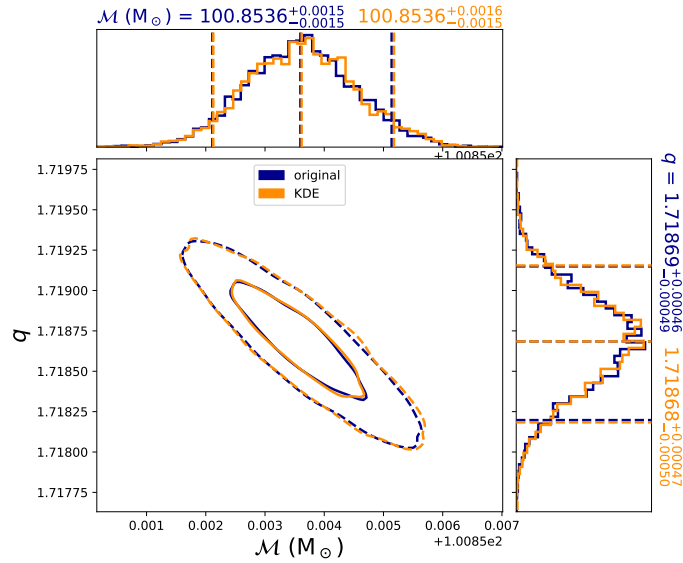


图 6-7 通过 KDE 构建概率密度函数，得到的分布结果与原数据几乎完全一致。

这个过程可以通过核密度估计 (Kernel Density Estimation, KDE) 来实现。这是一种非参数的概率密度估计方法，通过对数据点平滑处理来重构数据的概率密度函数。基本思路是在每个数据点上应用一个平滑的核函数，例如使用 Gaussian 核将每个数据点“扩展”成一个多维 Gaussian 分布，然后所有这些核函数叠加，即

得到该数据组的整体概率密度估计。如图6-7所示，该图展示了图6-1对应的地面后验分布通过 KDE 重构出的质量参数的概率密度，并根据此分布重新采样得到的结果。总体上 KDE 能够非常准确地还原原始分布的特征，因此我们将在后续分析中利用这一方法得到的先验信息，重新进行参数估计。

图6-8和6-9展示了对质量参数应用 KDE 后得到的参数估计结果。由于地面探测器本身对质量参数范围的限制已经足够严格，相较于上一节的测试结果，这里的先验范围已经集中在质量比多峰结构中的一个峰内。因此，无论是否考虑偏心率，参数估计结果均不再呈现多峰结构。所有注入参数均成功还原，同时参数估计精度也显著提升。这得益于地面探测器先验的约束，特别是大部分参数得以固定，我们所获得的测量精度相比于前人对探测能力的预期也有进一步的提升[81, 89]。

为了进一步探究更实际的参数估计情况，我们在注入信号中引入了基于各 TDI 通道 PSD 的 Gaussian 噪声。受噪声影响，参数估计结果虽然不再像无噪声时那样贴近真值，但真值依然落在后验概率分布的置信区间内，且整体参数估计精度与无噪声情况下的差别较小。因此，在档案搜索的情形下，即便考虑噪声因素，空间探测器对质量和偏心率参数的约束能力依旧得以保持。这进一步说明，通过整合来自地面和空间探测器的不同信息，档案搜索方法能够有效缓解参数间的简并关系，从而降低参数估计的难度。

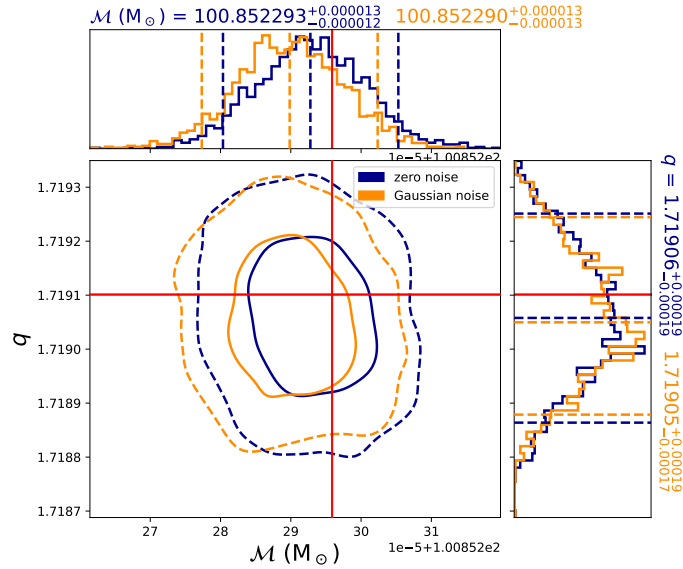


图 6-8 无噪声和 Gaussian 噪声假设下，使用地面探测估计结果由 KDE 算出的质量参数分布作为先验范围，计算 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 时的参数估计结果，其余条件与图6-5相同。红色线代表真实值，二维分布图中的实线（虚线）等高线表示了 50% (90%) 置信区间范围，一维边缘分布图中虚线分别代表中值位置和 90% 置信区间范围。

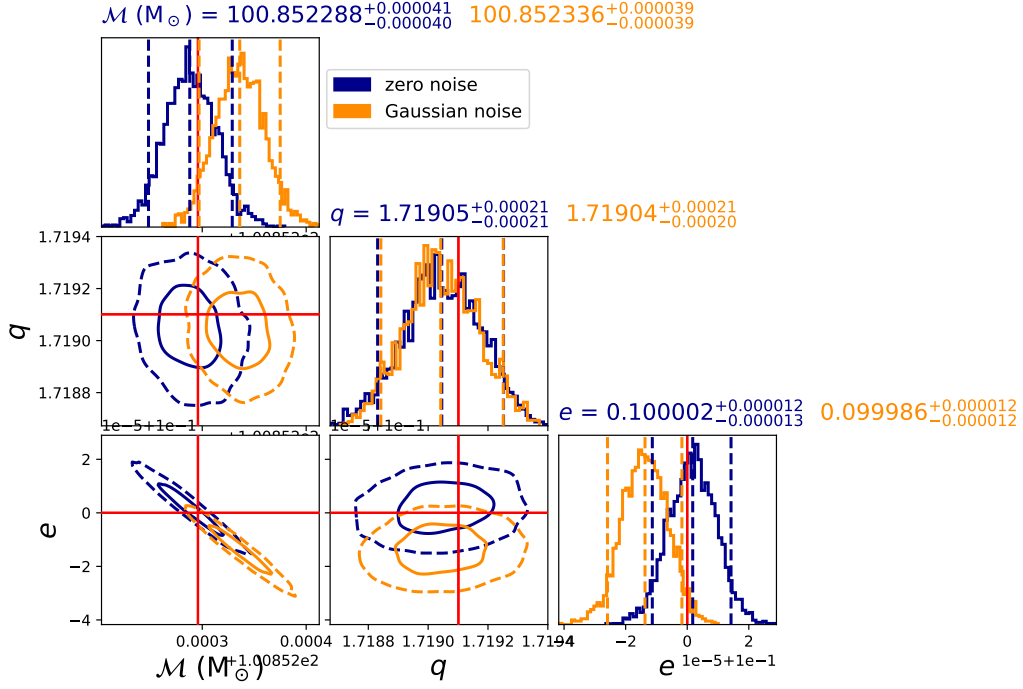


图 6-9 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时的参数估计结果，其余与图6-8相同。

然而，即便是考虑较少的参数空间维度，Gaussian 似然函数模型下的计算速度依然不能满足我们的要求——以图6-9为例，该参数估计过程共需 $\mathcal{O}(10^3)$ 核时。如果考虑天琴探测器的情况，由于高频截断在 1Hz，因此对应数据长度还要再高一个量级。此时不只是计算时间的问题，对应的内存需求也随之增加。因此虽然我们得到了合理的参数估计结果，这种方式并不能应用于实际的数据处理过程。接下来我们将重新讨论外差似然估计方法，并对其有效性进行评估。

6.3.2 参数估计的加速

由于上一小节中对计算资源的需求，我们重新利用外差似然估计方法计算 KDE 先验情况下的后验概率，结果如图6-10和6-11所示。对比图6-8和6-9，可以看出二者几乎不存在分布上的差别。我们在上一节中发现的 Gaussian 似然比外差似然获得的结果更宽的现象，在这里也几乎可以忽略不计。这同样是由于先验范围变窄加之多峰结构的消失，使得外差似然方法的计算结果偏差程度显著减小。并且，同样情况下，外差似然可以将计算时长从原本的 $\mathcal{O}(10^3)$ 核时缩减为 $\mathcal{O}(10)$ 核时，获得了两个量级的提升的同时不再需要占据大量内存，缓解了计算资源的消耗。

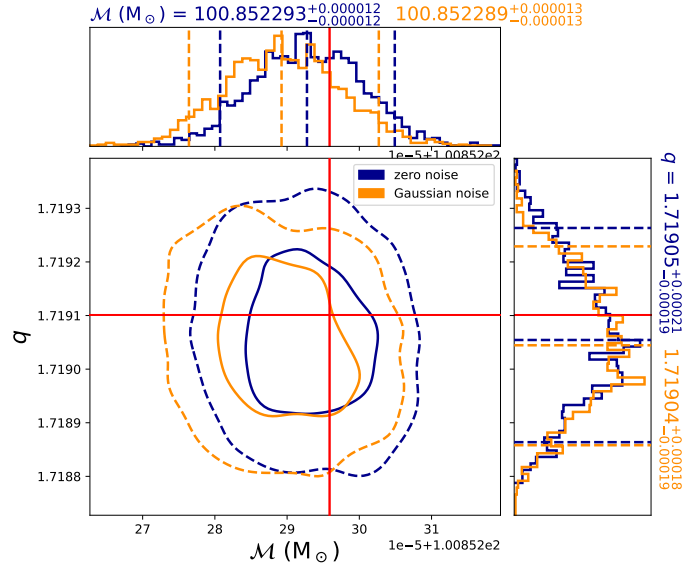


图 6-10 无噪声和 Gaussian 噪声假设下，使用外差似然方法计算 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 时的参数估计结果，其余条件与图6-8相同。

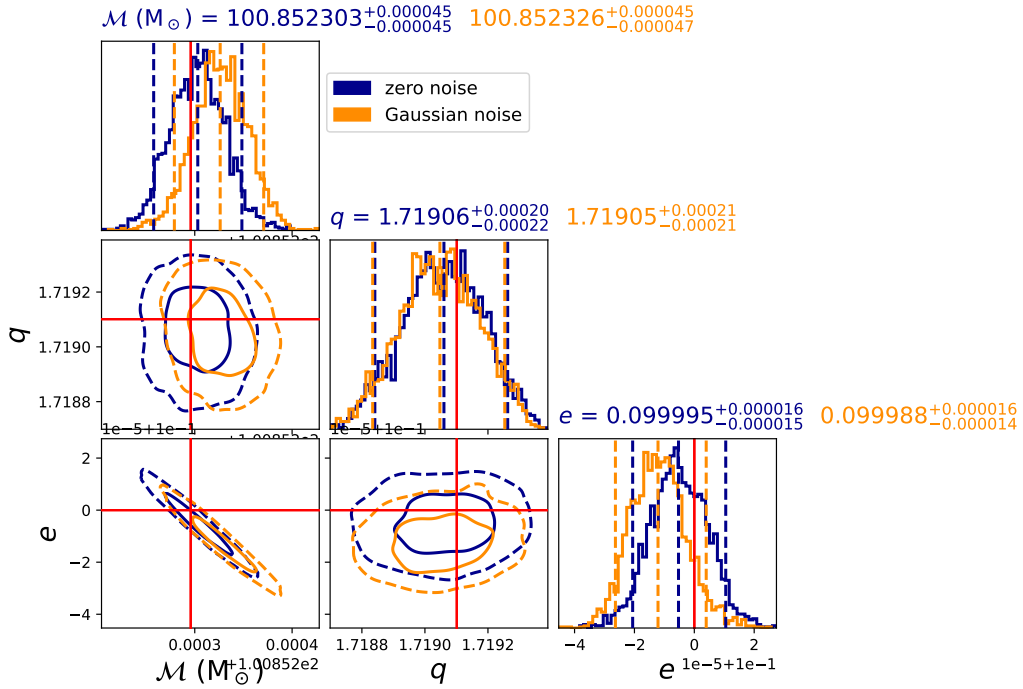


图 6-11 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时的参数估计结果，其余与图6-10相同。

有效性检验 然而，外差似然估计方法的使用前提是满足“波形的振幅相位随频率是缓变的”这一基本假设。对于含有多个偏心率谐频的波形，这样的假设似乎并不能成立。为了进一步探究外差似然在含偏心率情况下的有效性，我们把所有参

数均固定，只保留偏心率作为采样参数。因此，我们可以直接在给定的偏心率范围内均匀取点，然后分别计算它们的似然函数值。

通过对完全相同的点集分别使用 Gaussian 似然和外差似然两种方法计算，最终得到 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 情况下的结果如图6-12所示。这里的 $\log\text{lr}$ 代表对数似然函数比，具体指的是似然函数与只含噪声情况下似然函数的比的对数值，即回到式3-27，Gaussian 假设下有

$$\log P(D|\lambda_i, I) = \log \alpha - \frac{1}{2} [(D|D) + (h(\lambda)|h(\lambda)) - 2(h(\lambda)|D)], \quad (6-1)$$

其中 α 代表该正比关系的系数，因此为一常数。那么考虑数据中只含噪声，此时的似然函数可以写为

$$\log P(D|n) = \log \alpha - \frac{1}{2}(D|D), \quad (6-2)$$

对于一个指定的数据，这个值为一常数，因此在实际处理过程中只需要计算一次。则实际需要计算的物理量，即

$$\log\text{lr} = (h(\lambda)|D) - \frac{1}{2}(h(\lambda)|h(\lambda)). \quad (6-3)$$

对于参数估计，我们往往更关注不同参数处似然函数间的差别，因此常常用 $\log\text{lr}$ 代替实际的似然函数值以做分析和展示。

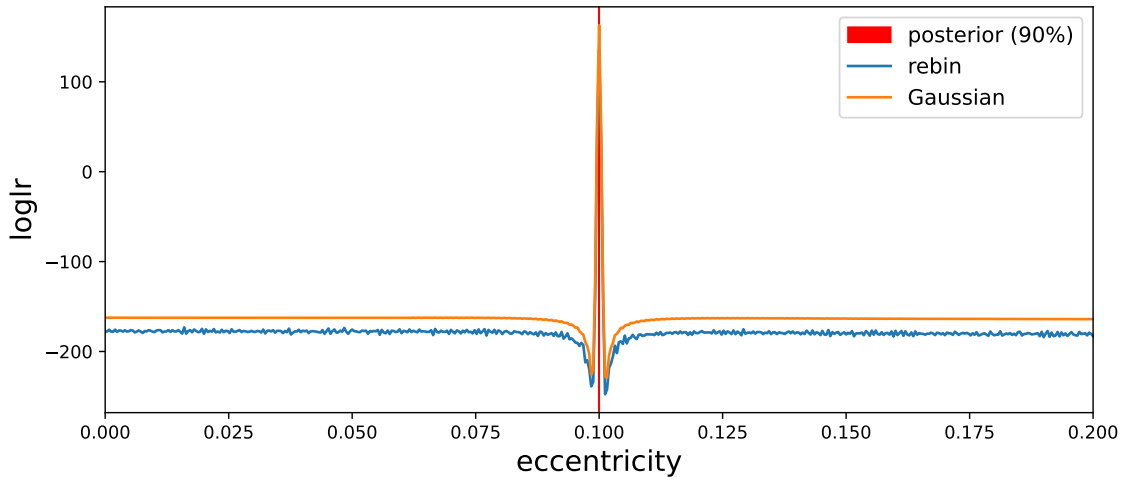


图 6-12 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时 Gaussian 似然和外差似然方法的结果比较。橙色线代表 Gaussian 似然的似然函数计算结果，蓝色线代表外差似然的结果，红色区域代表由图6-11中得出的偏心率一维边缘分布的 90% 置信区间范围。

从图中曲线我们可以看到，两种方法均成功找到了真值所在位置，并且似然函数的形状相同。只是对于外差似然，由于加速的需求使得波形计算时损失了一些细节，因此相比 Gaussian 似然的结果存在浮动。此外，噪声的似然函数计算也会存在偏差，因此在图中表现出整体的上下偏移。红色线代表了上一小节得到的偏心率一维边缘分布的 90% 置信区间范围，这一范围远小于似然函数出现显著变化的范围。我们将该图放大，如图6-13，该范围依旧位于似然函数峰值处左右。

我们还探究了更小偏心率情况下的结果，考虑 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.01$ ，此时两种方法得到的结果几乎重合。这说明 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时出现的浮动和偏差不是方法本身的不同导致的，而是随着偏心率的增加，偏心率谐频效应越来越明显，外差似然带来的偏差就越来越多。不过考虑到 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 虽然在天体物理上是相对显著的偏心率，在波形生成的角度依旧是一个较小的偏心率²。特别是考虑到档案搜索情况下较窄的采样范围，该方法得到的结果依然具有可信度。这也是上面外差似然与 Gaussian 似然得到的后验概率结果相差无几的原因。

基于以上分析，我们将继续使用外差似然的方法加速对于 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时其他情况的参数估计与讨论。在未来的参数估计中，则需要针对高偏心率情况进一步优化似然函数的加速方法。

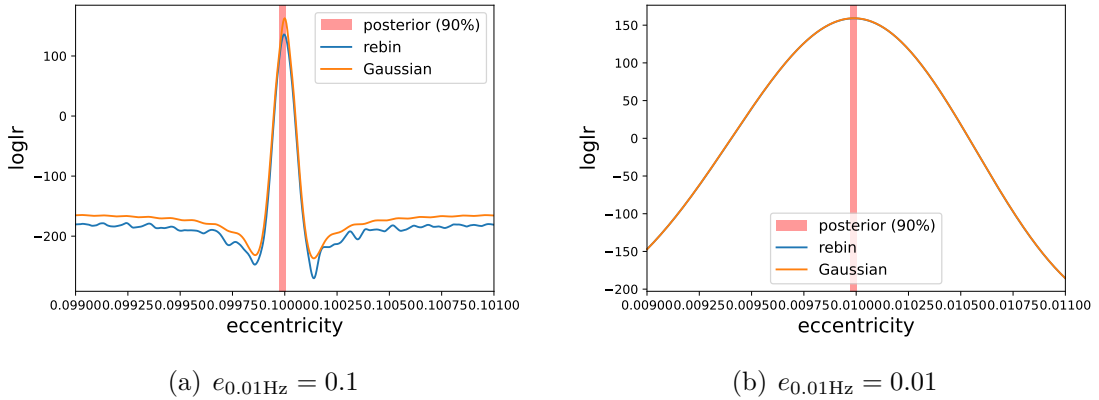


图 6-13 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 和 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.01$ 时两种方法的似然函数结果的进一步对比。 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 情况即图6-12放大后的结果展示。

²例如很多含偏心率的波形将适用上限设计在初始偏心率为 0.1 处，以方便忽略 $\mathcal{O}(e^2)$ 项带来的效应。

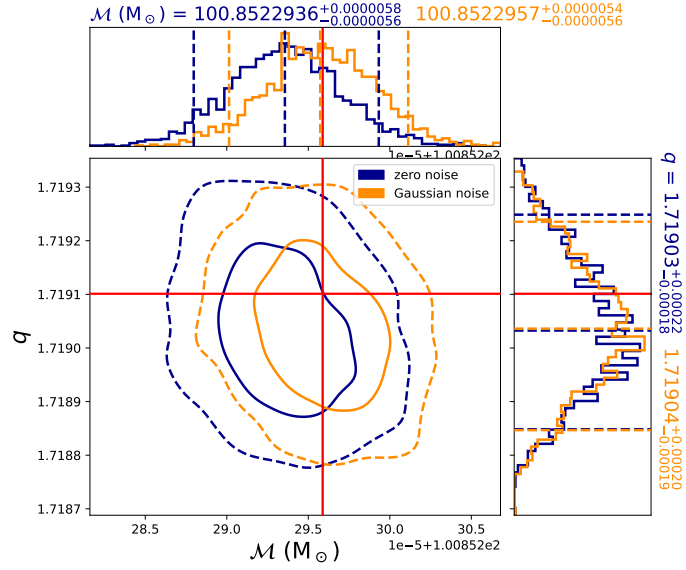


图 6-14 天琴探测器情况下 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的参数估计结果，与 LISA 不同，天琴使用 1Hz 作为频率上限。其他条件与图6-10相同。

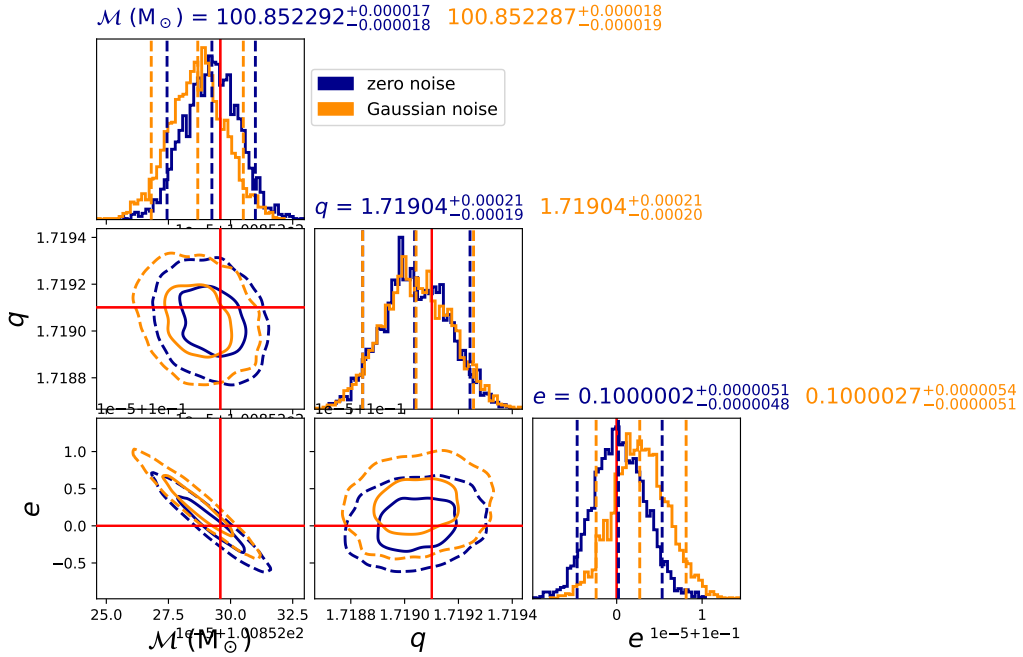


图 6-15 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 时的参数估计结果，其余与图6-14相同。

天琴的参数估计 在确认了外差似然的有效性以后，我们由此可以对天琴探测器的情况给出参数估计结果，如图6-14和6-15所示。天琴的频率上限取 1Hz，但由于外差似然本身的优化，这种计算依然只需要 $\mathcal{O}(10)$ 核时。相比于 LISA 的情况，

该源在天琴中信噪比更高（总信噪比天琴约为 42，LISA 约为 16），因此在啁啾质量和偏心率参数上均有更好的限制能力。与此同时，该参数估计结果也与前人工作中的探测能力预期相吻合[80, 87]。

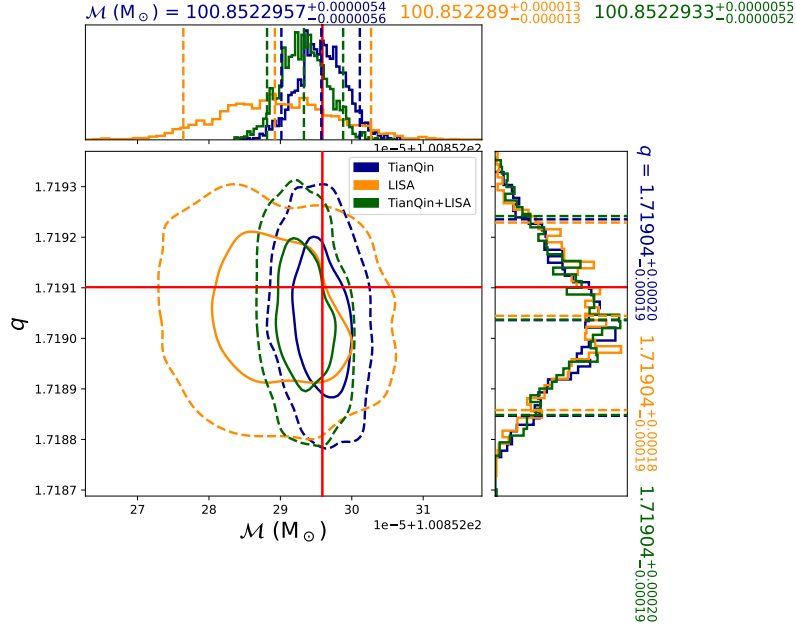


图 6-16 Gaussian 噪声假设下，联合探测时 $e_{0.01\text{Hz}} = 0$ 的参数估计结果，其他条件与图6-14相同。这里把天琴和 LISA 单独探测时的结果也一并绘制，以作对比。

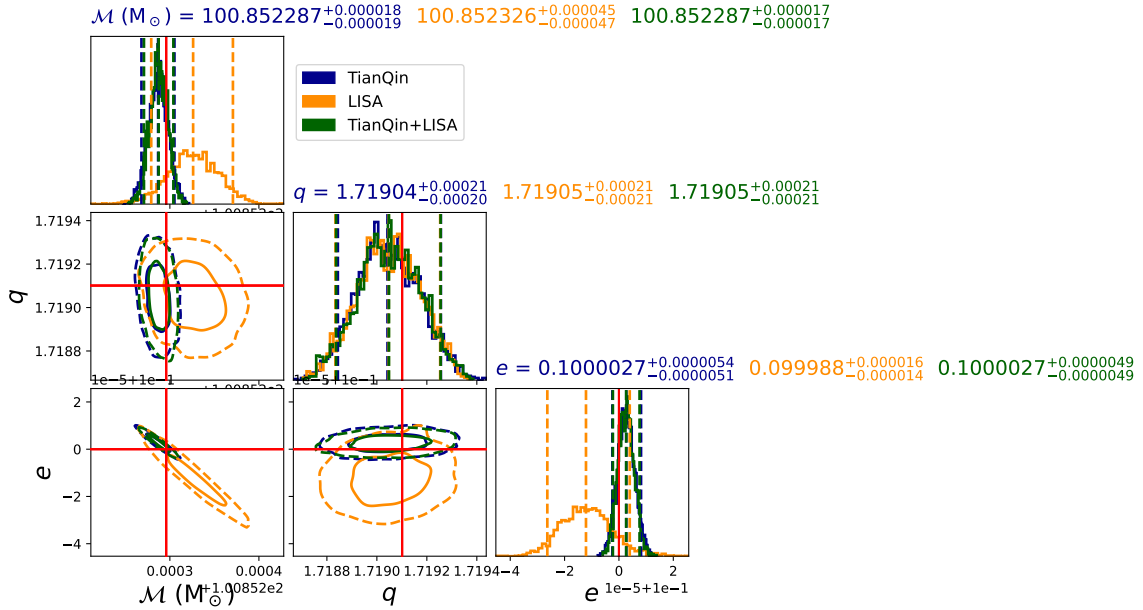


图 6-17 $e_{0.01\text{Hz}} = 0.1$ 的参数估计结果，其余与图6-16相同。

联合探测的参数估计 在成功计算了天琴和 LISA 的参数估计结果后，我们得以尝试针对两个探测器联合探测情况给出进一步讨论。如图6-16和6-17所示，我们同时绘制了相同条件下单探测器的参数估计结果以作对比。我们还测试了将天琴频率上限也设置为 0.1Hz，结果并无显著差别，这主要是因为旋近阶段系统在高频处的信噪比贡献并不高。因此，天琴在联合探测中对参数的限制贡献更显著，其原因主要在于信噪比的差别，而非频段上的差异。同时可以看到，这种差异对于啁啾质量和偏心率这种主导参数的影响尤为显著，而在质量比参数上并没有显著差别。

6.4 本章小结

在这一章中，我们在档案搜索的基础之上实现了后续的参数估计流水线，并深入讨论了参数估计中涉及的多种方法。首先，我们更新了更实际的地面探测器配置，并利用贝叶斯推断重新评估了地面探测器网络对参数的限制能力，参数估计结果符合预期。随后，我们将该结果作为空间探测器的先验信息，以用来进行下一步的参数估计。

我们通过编写插件的方式实现了 PyCBC 对空间探测器参数估计的支持。然后我们针对不同的采样器和似然函数进行了初步的测试，并同时根据测试结果验证了啁啾质量和偏心率的简并关系。此外，我们还发现偏心率的引入使得质量比与相位参数间产生了进一步的简并，并带来质量比参数的多峰结构。

为了充分利用地面探测器提供的信息，我们使用核密度估计的方法重构了质量参数的分布情况，并将该分布直接作为先验信息。由此，我们成功还原了注入参数，并指出由于地面探测的约束，使得档案搜索参数估计可以进一步限制参数范围，从而有效缓解参数间的简并问题。但传统的似然函数计算非常消耗计算资源，因此我们还讨论了使用外差似然方法的计算结果，并对其在较低偏心率情况下的有效性给出讨论。得益于外差似然的加速计算，我们不仅把计算时间缩短了两个量级，还可以在数据中存在噪声的假设下分别计算天琴和 LISA 以及二者联合探测情况下的结果，这些结果均符合前人工作中预期的参数估计能力。

由此，我们成功实现了全过程的空间引力波档案搜索流水线。

总结与展望

过去的诸多研究均表明，偏心率的演化为揭示恒星级双黑洞系统的形成机制提供了重要判据。空间引力波探测器将有能力探测恒星级双黑洞的早期旋近阶段。因而相比于主要探测并合前后信号的地面探测器，空间探测器将更有可能捕捉到系统早期的偏心率演化。然而，恒星级双黑洞的空间引力波探测尚存在计算成本上的巨大挑战。对此，前人提出了一种多波段的探测方法——档案搜索。这种方法旨在针对地面探测器确认的引力波事件，在空间探测器数据中回溯搜索与之对应的信号。本课题根据该理论方案，实现了首个涵盖“数据模拟-信号探测-信号测量”全过程的恒星级双黑洞空间引力波档案搜索流水线。同时，我们还针对偏心率参数在流水线的各个部分给出了进一步的优化或讨论。

我们首先实现了一个多任务空间引力波数据模拟软件 `GWSpace`。特别地，因为偏心率谐频的引入，我们推导修正了包含偏心率参数的双黑洞波形对应的 TDI 天线响应函数的计算，并针对 `EccentricFD` 波形在程序上补充了谐频分解部分。该修改公布成为了 `pyEccentricFD` 程序包，并作为子模块接入到了 `GWSpace` 中。除了本课题的使用场景，`GWSpace` 还支持大质量双黑洞、GCB 和 EMRI 等多种引力波源的模拟，提供了丰富的接口与实用工具，因此有非常好的扩展性，特别是统一了不同空间探测任务的接口，将非常有利于多探测器联合探测情况的数据处理。

随后，我们实现了档案搜索情况下空间探测器波形模板库的生成，进而实现了探测流水线。我们评估了地面探测器网络的探测能力，并以此确定档案搜索时啁啾质量的参数范围。以地面探测器使用的模板库生成程序 `sbank` 为基础，我们通过增改实现了其对空间探测器情况的支持。我们还在方法介绍的部分通过简单情况下的示例，阐述了随机模板放置算法的基本逻辑。通过基于波形模板库参数分布及有效性等方面的分析，我们验证了生成模板库的大小和特征符合理论预期。考虑合理外推已计算的模板库的结果，我们发现包含啁啾质量和偏心率的全档案搜索空间的模板库预计有 $\sim \mathcal{O}(10^{8-9})$ 个模板。这比不含偏心率时的模板库大小要增加五个量级，并且在计算资源上预期要 $\sim \mathcal{O}(10^6)$ 核时以及 $\sim \mathcal{O}(10^5)$ GB 的内存。因此，空间探测的模板库生成在计算资源方面仍然面临挑战，这主要是由于天线响应函数和含偏心率波形计算的带来的复杂性。但与此同时，我们发现，在初始偏心率 $e_i \gtrsim 5 \times 10^{-4}$ 时，空间探测器就可以将含有该偏心率的信号与无偏心率的情况区分开，这种远高于下一代地面探测器的偏心率探测精度，使得空间探测器得以帮助区分大部分恒星级双黑洞的形成机制模型。这也进一步说明了偏心率参数在恒星级双黑洞的空间探测中不可或缺。我们还根据模板库大小估算了档案搜索情况下的信噪比阈值，偏心

率的引入将使其从 ~ 5 提高到 ~ 7 ，但相比于全空间搜索时的 ~ 15 ，信噪比阈值依然得到了显著降低。

最后，我们在档案搜索的基础上实现了适用于空间探测器的参数估计流水线。我们通过贝叶斯推断评估了地面探测器网络对参数的限制，并将该后验概率分布作为空间探测器的先验信息。然后我们通过插件的形式实现了 PyCBC 对空间探测器参数估计的支持。由于地面探测器的约束，空间部分的估计可以被限制在很窄的范围，但由于观测时间长，数据点多，导致这样的情况仍然非常消耗计算资源。对此，我们使用了外差似然估计的方法加速了计算，使其由原来的 $\mathcal{O}(10^3)$ 核时缩减为 $\mathcal{O}(10)$ 核时。这使得我们有能力探究当数据中包含噪声时的参数估计，而不只局限于零噪声假设。最终，我们的结果均很好地还原了注入值，并且参数的估计范围也符合预期。

本课题在偏心率参数的探测和档案搜索的实现上为后续工作提供了重要参考。然而本课题仍存在一些局限性，部分工作有待未来研究提供进一步的优化改进：

首先，我们选取的是不含自旋参数的 EccentricFD 波形。由于我们讨论的是恒星级双黑洞的旋近阶段，因此这一阶段中自旋效应可以忽略不计^[200]。特别是对于档案搜索场景，自旋参数将完全由地面探测器确定，因此这种波形选取不影响我们已获得的结论。然而，在未来的数据处理过程中，无论地面还是空间部分的数据处理都需要使用更加精确的波形以避免可能存在的系统误差^[93, 122, 201–203]。

其次，我们在计算过程中均未考虑探测器占空比与信号混叠问题。探测器并非始终处于工作状态，这会降低地面探测器网络对空间方位等参数的估计精度，从而需要在未来将这类参数扩展至档案搜索数据处理中。空间探测器的数据间隙问题也将势必对结果产生一定影响^[204]（如天琴三个月工作、三个月待机的工作模式）。此外，实际空间探测器数据中各类源的引力波信号会发生混叠，影响各自的参数估计精度。因此以上几种因素也是未来数据分析需要考虑的问题。

最后，正如我们反复在正文中提到的，无论是模板库的生成还是后续的参数估计，虽然档案搜索已经将参数先验限制在很小的范围内，但由于空间探测器本身的观测时长和波形与响应计算的复杂性，恒星级双黑洞的空间数据处理依旧在计算资源上存在挑战。虽然在空间探测器正式运行的未来，计算资源的问题会有所缓解，但高效的数据处理方法依旧不可或缺。对于探测，我们需要更高效的生成模板库的方法；对于测量，我们也需要针对高偏心率情况优化外差似然估计或引入其他加速方案，同时利用 Kullback-Leibler 散度等指标评估概率分布优化的效果^[205, 206]。但无论如何，我们的工作实现了针对恒星级双黑洞偏心率探测的一个可行的解决方案，并因此为限制恒星级双黑洞形成机制提供了帮助。

参考文献

- [1] BELCZYNSKI K, HOLZ D E, BULIK T, et al. The first gravitational-wave source from the isolated evolution of two 40-100 Msun stars[J/OL]. *Nature*, 2016, 534: 512.
<http://dx.doi.org/10.1038/nature18322>.
- [2] BANERJEE S, BAUMGARDT H, KROUPA P. Stellar-mass black holes in star clusters: implications for gravitational wave radiation[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2010, 402(1): 371–380.
<https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-2966.2009.15880.x>.
- [3] ANTONINI F, TOONEN S, HAMERS A S. Binary black hole mergers from field triples: properties, rates and the impact of stellar evolution[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2017, 841(2): 77.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aa6f5e>.
- [4] SAMSING J, BARTOS I, D’ORAZIO D J, et al. AGN as potential factories for eccentric black hole mergers[J/OL]. *Nature*, 2022, 603(7900): 237–240.
<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-021-04333-1>.
- [5] SASAKI M, SUYAMA T, TANAKA T, et al. Primordial black holes—perspectives in gravitational wave astronomy[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2018, 35(6): 063001.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7b4>.
- [6] GARCIA-BELLIDO J, RUIZ MORALES E. Primordial black holes from single field models of inflation[J/OL]. *Phys. Dark Univ.*, 2017, 18: 47–54.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.dark.2017.09.007>.
- [7] ABBOTT B P, OTHERS. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, 116(6): 061102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [8] EINSTEIN A. The Field Equations of Gravitation[J]. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915, 1915: 844–847.
- [9] HULSE R A, TAYLOR J H. Discovery of a pulsar in a binary system[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 1975, 195: L51–L53.
<http://dx.doi.org/10.1086/181708>.

- [10] TAYLOR J H, FOWLER L A, MCCULLOCH P M. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16[J/OL]. *Nature*, 1979, 277: 437–440.
<http://dx.doi.org/10.1038/277437a0>.
- [11] TAYLOR J H, WEISBERG J M. A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PS R 1913+16[J/OL]. *Astrophys. J.*, 1982, 253: 908–920.
<http://dx.doi.org/10.1086/159690>.
- [12] WEBER J. Evidence for discovery of gravitational radiation[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 1969, 22: 1320–1324.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.1320>.
- [13] ANTONIADIS J, OTHERS. The second data release from the European Pulsar Timing Array - III. Search for gravitational wave signals[J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2023, 678: A50.
<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202346844>.
- [14] AGAZIE G, OTHERS. The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2023, 951(1): L8.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acdac6>.
- [15] REARDON D J, OTHERS. Search for an Isotropic Gravitational-wave Background with the Parkes Pulsar Timing Array[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2023, 951(1): L6.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acdd02>.
- [16] XU H, OTHERS. Searching for the Nano-Hertz Stochastic Gravitational Wave Background with the Chinese Pulsar Timing Array Data Release I[J/OL]. *Res. Astron. Astrophys.*, 2023, 23(7): 075024.
<http://dx.doi.org/10.1088/1674-4527/acdfa5>.
- [17] ABBOTT B P, OTHERS. LIGO: The Laser interferometer gravitational-wave observatory[J/OL]. *Rept. Prog. Phys.*, 2009, 72: 076901.
<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/72/7/076901>.
- [18] HARRY G M, COLLABORATION L S, OTHERS. Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2010, 27(8): 084006.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084006>.

-
- [19] ACCADIA T, OTHERS. Virgo: a laser interferometer to detect gravitational waves[J/OL]. JINST, 2012, 7: P03012.
<http://dx.doi.org/10.1088/1748-0221/7/03/P03012>.
- [20] ACERNESE F, OTHERS. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2015, 32(2): 024001.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/2/024001>.
- [21] SOMIYA K. Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2012, 29: 124007.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/12/124007>.
- [22] ASO Y, MICHIMURA Y, SOMIYA K, et al. Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector[J/OL]. Phys. Rev. D, 2013, 88(4): 043007.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.043007>.
- [23] WILLKE B, OTHERS. The GEO 600 gravitational wave detector[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2002, 19: 1377–1387.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/19/7/321>.
- [24] DOOLEY K L, OTHERS. GEO 600 and the GEO-HF upgrade program: successes and challenges[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2016, 33: 075009.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/7/075009>.
- [25] PUNTURO M, ABERNATHY M, ACERNESE F, et al. The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2010, 27(19): 194002.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/19/194002>.
- [26] REITZE D, ADHIKARI R X, BALLMER S, et al. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO[C] // Bulletin of the American Astronomical Society: Vol 51. 2019: 35.
- [27] MOORE C J, COLE R H, BERRY C P L. Gravitational-wave sensitivity curves[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2014.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/1/015014>.
- [28] LUO J, OTHERS. TianQin: a space-borne gravitational wave detector[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2016, 33(3): 035010.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/3/035010>.
- [29] AMARO-SEOANE P, AUDLEY H, BABAK S, et al. Laser Interferometer Space Antenna[J]. arXiv e-prints, 2017: arXiv:1702.00786.

-
- [30] HU W-R, WU Y-L. The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity[J/OL]. *Natl. Sci. Rev.*, 2017, 4(5): 685–686.
<http://dx.doi.org/10.1093/nsr/nwx116>.
 - [31] LI E-K, WANG H, CHEN H-Y, et al. GWSpace: a multi-mission science data simulator for space-based gravitational wave detection[J/OL]. *arXiv e-prints*, 2023: arXiv:2309.15020.
<http://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2309.15020>.
 - [32] CORRAL-SANTANA J M, CASARES J, MUNOZ-DARIAS T, et al. Black-CAT: A catalogue of stellar-mass black holes in X-ray transients[J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2016, 587: A61.
<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201527130>.
 - [33] OROSZ J A, MCCLINTOCK J E, AUFDENBERG J P, et al. The Mass of the Black Hole in Cygnus X-1[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2011, 742(2): 84.
<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/742/2/84>.
 - [34] MILLER-JONES J C A, OTHERS. Cygnus X-1 contains a 21-solar mass black hole—Implications for massive star winds[J/OL]. *Science*, 2021, 371(6533): 1046–1049.
<http://dx.doi.org/10.1126/science.abb3363>.
 - [35] ABBOTT B P, OTHERS. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2019, 9(3): 031040.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.9.031040>.
 - [36] ABBOTT R, OTHERS. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the First Half of the Third Observing Run[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2021, 11: 021053.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.11.021053>.
 - [37] ABBOTT R, OTHERS. GWTC-2.1: Deep extended catalog of compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2024, 109(2): 022001.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.109.022001>.
 - [38] ABBOTT R, OTHERS. GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2023, 13(4): 041039.
<https://arxiv.org/abs/2111.03606>.

-
- [39] NITZ A H, CAPANO C, NIELSEN A B, et al. 1-OGC: The first open gravitational-wave catalog of binary mergers from analysis of public Advanced LIGO data[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2019, 872(2): 195.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab0108>.
- [40] NITZ A H, DENT T, DAVIES G S, et al. 2-OGC: Open Gravitational-wave Catalog of binary mergers from analysis of public Advanced LIGO and Virgo data[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2020, 891: 123.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab733f>.
- [41] NITZ A H, CAPANO C D, KUMAR S, et al. 3-OGC: Catalog of Gravitational Waves from Compact-binary Mergers[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2021, 922(1): 76.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac1c03>.
- [42] NITZ A H, KUMAR S, WANG Y-F, et al. 4-OGC: Catalog of Gravitational Waves from Compact Binary Mergers[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2023, 946(2): 59.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aca591>.
- [43] ABBOTT B P, OTHERS. Astrophysical Implications of the Binary Black-Hole Merger GW150914[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 818(2): L22.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8205/818/2/L22>.
- [44] ABBOTT B P, OTHERS. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2019, 882(2): L24.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab3800>.
- [45] ABBOTT R, OTHERS. Population Properties of Compact Objects from the Second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2021, 913(1): L7.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abe949>.
- [46] ABBOTT R, OTHERS. The population of merging compact binaries inferred using gravitational waves through GWTC-3[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2023, 13(1): 011048.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.13.011048>.
- [47] KLIMENKO S, MITSELMAKHER G. A wavelet method for detection of gravitational wave bursts[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2004, 21(20): S1819–S1830.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/21/20/025>.

- [48] KLIMENKO S, OTHERS. Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors[J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 93(4) : 042004.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.042004>.
- [49] MESSICK C, BLACKBURN K, BRADY P, et al. Analysis framework for the prompt discovery of compact binary mergers in gravitational-wave data[J/OL]. Phys. Rev. D, 2017, 95(4) : 042001.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.042001>.
- [50] SACHDEV S, OTHERS. The GstLAL Search Analysis Methods for Compact Binary Mergers in Advanced LIGO's Second and Advanced Virgo's First Observing Runs[J]. arXiv e-prints, 2019 : arXiv:1901.08580.
- [51] ALLEN B, ANDERSON W G, BRADY P R, et al. FINDCHIRP: An Algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries[J/OL]. Phys. Rev. D, 2012, 85 : 122006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.122006>.
- [52] USMAN S A, OTHERS. The PyCBC search for gravitational waves from compact binary coalescence[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2016, 33(21) : 215004.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/21/215004>.
- [53] ABBOTT B P, OTHERS. GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4M_{\odot}$ [J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2020, 892(1) : L3.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab75f5>.
- [54] ABBOTT R, OTHERS. GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object[J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2020, 896(2) : L44.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ab960f>.
- [55] BARKAT Z, RAKAVY G, SACK N. Dynamics of Supernova Explosion Resulting from Pair Formation[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 1967, 18 : 379–381.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.18.379>.
- [56] WOOSLEY S E, HEGER A. The Pair-Instability Mass Gap for Black Holes[J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2021, 912(2) : L31.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abf2c4>.

-
- [57] MILLER M C, COLBERT E J M. Intermediate - mass black holes[J/OL]. Int. J. Mod. Phys. D, 2004, 13: 1–64.
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218271804004426>.
- [58] ÖZEL F, PSALTIS D, NARAYAN R, et al. The Black Hole Mass Distribution in the Galaxy[J/OL]. Astrophys. J., 2010, 725(2): 1918–1927.
<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/725/2/1918>.
- [59] ABBOTT R, OTHERS. GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150M_{\odot}$ [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 125(10): 101102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.101102>.
- [60] ABBOTT B P, OTHERS. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2017, 119(16): 161101.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.161101>.
- [61] ABBOTT B P, OTHERS. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger[J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2017, 848(2): L12.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9>.
- [62] CONNAUGHTON V, OTHERS. Fermi GBM Observations of LIGO Gravitational Wave event GW150914[J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2016, 826(1): L6.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8205/826/1/L6>.
- [63] GRAHAM M J, OTHERS. Candidate Electromagnetic Counterpart to the Binary Black Hole Merger Gravitational Wave Event S190521g[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2020, 124(25): 251102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.251102>.
- [64] ABBOTT B P, OTHERS. Search for Eccentric Binary Black Hole Mergers with Advanced LIGO and Advanced Virgo during their First and Second Observing Runs[J/OL]. Astrophys. J., 2019, 883(2): 149.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab3c2d>.
- [65] ABAC A G, OTHERS. Search for Eccentric Black Hole Coalescences during the Third Observing Run of LIGO and Virgo[J/OL]. Astrophys. J., 2024, 973(2): 132.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ad65ce>.
- [66] WU S, CAO Z, ZHU Z-H. Measuring the eccentricity of binary black holes in GWTC-1 by using the inspiral-only waveform[J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2020, 495(1): 466–478.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa1176>.

- [67] ROMERO-SHAW I M, LASKY P D, THRANE E. Searching for Eccentricity: Signatures of Dynamical Formation in the First Gravitational-Wave Transient Catalogue of LIGO and Virgo[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2019, 490(4) : 5210–5216.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz2996>.
- [68] GAYATHRI V, HEALY J, LANGE J, et al. Eccentricity estimate for black hole mergers with numerical relativity simulations[J/OL]. *Nature Astron.*, 2022, 6(3) : 344–349.
<http://dx.doi.org/10.1038/s41550-021-01568-w>.
- [69] ABBOTT R, OTHERS. Properties and Astrophysical Implications of the 150 $M_{\odot}$ Binary Black Hole Merger GW190521[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2020, 900(1) : L13.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aba493>.
- [70] ROMERO-SHAW I M, LASKY P D, THRANE E, et al. GW190521: orbital eccentricity and signatures of dynamical formation in a binary black hole merger signal[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2020, 903(1) : L5.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abbe26>.
- [71] ROMERO-SHAW I M, LASKY P D, THRANE E. Signs of Eccentricity in Two Gravitational-wave Signals May Indicate a Subpopulation of Dynamically Assembled Binary Black Holes[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2021, 921(2) : L31.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/ac3138>.
- [72] ROMERO-SHAW I M, LASKY P D, THRANE E. Four Eccentric Mergers Increase the Evidence that LIGO–Virgo–KAGRA’s Binary Black Holes Form Dynamically[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2022, 940(2) : 171.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac9798>.
- [73] RAMOS-BUADES A, TIWARI S, HANEY M, et al. Impact of eccentricity on the gravitational-wave searches for binary black holes: High mass case[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2020, 102(4) : 043005.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.043005>.
- [74] FAVATA M, KIM C, ARUN K G, et al. Constraining the orbital eccentricity of inspiralling compact binary systems with Advanced LIGO[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2022, 105(2) : 023003.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.023003>.

-
- [75] LENON A K, BROWN D A, NITZ A H. Eccentric binary neutron star search prospects for Cosmic Explorer[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2021, 104(6): 063011.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.063011>.
- [76] SUN B, CAO Z, WANG Y, et al. Parameter estimation of eccentric inspiraling compact binaries using an enhanced post circular model for ground-based detectors[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2015, 92(4): 044034.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.044034>.
- [77] XUAN Z, NAOZ S, CHEN X. Detecting accelerating eccentric binaries in the LISA band[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 107(4): 043009.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.043009>.
- [78] SAINI P, FAVATA M, ARUN K G. Systematic bias on parametrized tests of general relativity due to neglect of orbital eccentricity[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2022, 106(8): 084031.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.106.084031>.
- [79] BHAT S A, SAINI P, FAVATA M, et al. Systematic bias on the inspiral-merger-ringdown consistency test due to neglect of orbital eccentricity[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 107(2): 024009.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.024009>.
- [80] LIU S, HU Y-M, ZHANG J-D, et al. Science with the TianQin observatory: Preliminary results on stellar-mass binary black holes[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2020, 101(10): 103027.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.103027>.
- [81] NISHIZAWA A, BERTI E, KLEIN A, et al. eLISA eccentricity measurements as tracers of binary black hole formation[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2016, 94(6): 064020.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.064020>.
- [82] NISHIZAWA A, SESANA A, BERTI E, et al. Constraining stellar binary black hole formation scenarios with eLISA eccentricity measurements[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2017, 465(4): 4375–4380.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stw2993>.
- [83] CHEN X, AMARO-SEOANE P. Revealing the formation of stellar-mass black hole binaries: The need for deci-Hertz gravitational wave observatories[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2017, 842(1): L2.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa74ce>.

- [84] YANG T, CAI R-G, CAO Z, et al. Eccentricity of Long Inspirling Compact Binaries Sheds Light on Dark Sirens[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2022, 129(19): 191102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.191102>.
- [85] TOUBIANA A, OTHERS. Detectable environmental effects in GW190521-like black-hole binaries with LISA[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2021, 126(10): 101105.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.101105>.
- [86] HOLGADO A M, ORTEGA A, RODRIGUEZ C L. Dynamical Formation Scenarios for GW190521 and Prospects for Decihertz Gravitational-Wave Astronomy with GW190521-Like Binaries[J/OL]. Astrophys. J. Lett., 2021, 909(2): L24.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/abe7f5>.
- [87] LIU S, ZHU L-G, HU Y-M, et al. Capability for detection of GW190521-like binary black holes with TianQin[J/OL]. Phys. Rev. D, 2022, 105(2): 023019.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.023019>.
- [88] CORNISH N J, CROWDER J. LISA data analysis using MCMC methods[J/OL]. Phys. Rev. D, 2005, 72: 043005.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.72.043005>.
- [89] TOUBIANA A, MARSAT S, BABAK S, et al. Parameter estimation of stellar-mass black hole binaries with LISA[J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 102: 124037.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.124037>.
- [90] MARSAT S, BAKER J G, CANTON T D. Exploring the Bayesian parameter estimation of binary black holes with LISA[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103: 083011.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.083011>.
- [91] BAGHI Q. The LISA Data Challenges[C] // 56th Rencontres de Moriond on Gravitation. 2022.
- [92] BUSCICCHIO R, KLEIN A, ROEBBER E, et al. Bayesian parameter estimation of stellar-mass black-hole binaries with LISA[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 104(4): 044065.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.044065>.

-
- [93] LYU X, LI E-K, HU Y-M. Parameter Estimation of Stellar Mass Binary Black Holes under the Network of TianQin and LISA[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 108(8): 083023.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.083023>.
- [94] MOORE C J, GEROSA D, KLEIN A. Are stellar-mass black-hole binaries too quiet for LISA?[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2019, 488(1): L94–L98.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnrasl/slz104>.
- [95] DAL CANTON T, HARRY I W. Designing a template bank to observe compact binary coalescences in Advanced LIGO’s second observing run[J]. *arXiv e-prints*, 2017.
- [96] ABBOTT B P, OTHERS. The Rate of Binary Black Hole Mergers Inferred from Advanced LIGO Observations Surrounding GW150914[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 833(1): L1.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8205/833/1/L1>.
- [97] DIGMAN M C, CORNISH N J. Parameter estimation for stellar-origin black hole mergers in LISA[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 108(2): 023022.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.023022>.
- [98] BANDOPADHYAY D, MOORE C J. LISA stellar-mass black hole searches with semicoherent and particle-swarm methods[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 108(8): 084014.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.084014>.
- [99] BANDOPADHYAY D, MOORE C J. GPU-accelerated semicoherent hierarchical search for stellar-mass binary inspiral signals in LISA[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2024, 110(10): 103026.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.103026>.
- [100] FU Y, WANG Y, MOHANTY S D. Hierarchical search method for gravitational waves from stellar-mass binary black holes in noisy space-based detector data[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2025, 111(4): 043026.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.111.043026>.
- [101] Zhang X-T, Korsakova N, Chan M L, et al. Searching for gravitational waves from stellar-mass binary black holes early inspiral[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2024, 110(10): 103034.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.103034>.

- [102]SESANA A. Prospects for Multiband Gravitational-Wave Astronomy after GW150914[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116(23): 231102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.231102>.
- [103]SESANA A. Multi-band gravitational wave astronomy: science with joint space- and ground-based observations of black hole binaries[C] // Journal of Physics: Conference Series: Vol 840. 2017: 012018.
- [104]VITALE S. Multiband Gravitational-Wave Astronomy: Parameter Estimation and Tests of General Relativity with Space- and Ground-Based Detectors[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 117(5): 051102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.051102>.
- [105]KLEIN A, OTHERS. The last three years: multiband gravitational-wave observations of stellar-mass binary black holes[J]. arXiv e-prints, 2022: arXiv:2204.03423.
- [106]TSO R, GEROSA D, CHEN Y. Optimizing LIGO with LISA forewarnings to improve black-hole spectroscopy[J/OL]. Phys. Rev. D, 2019, 99(12): 124043.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.124043>.
- [107]WONG K W K, KOVETZ E D, CUTLER C, et al. Expanding the LISA Horizon from the Ground[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 121(25): 251102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.251102>.
- [108]EWING B, SACHDEV S, BORHANIAN S, et al. Archival searches for stellar-mass binary black holes in LISA data[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(2): 023025.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.023025>.
- [109]PETERS P C, MATHEWS J. Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit[J/OL]. Phys. Rev., 1963, 131: 435–439.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [110]PETERS P C. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses[J/OL]. Phys. Rev., 1964, 136: B1224–B1232.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.136.B1224>.
- [111]BARACK L, OTHERS. Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2019, 36(14): 143001.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab0587>.

-
- [112] KOWALSKA I, BULIK T, BELCZYNSKI K, et al. The eccentricity distribution of compact binaries[J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2011, 527: A70.
<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201015777>.
- [113] BREIVIK K, RODRIGUEZ C L, LARSON S L, et al. Distinguishing Between Formation Channels for Binary Black Holes with LISA[J/OL]. *Astrophys. J. Lett.*, 2016, 830(1): L18.
<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8205/830/1/L18>.
- [114] RODRIGUEZ C L, CHATTERJEE S, RASIO F A. Binary Black Hole Mergers from Globular Clusters: Masses, Merger Rates, and the Impact of Stellar Evolution[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2016, 93(8): 084029.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.084029>.
- [115] SAMSING J, D’ORAZIO D J. Black Hole Mergers From Globular Clusters Observable by LISA I: Eccentric Sources Originating From Relativistic N -body Dynamics[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2018, 481(4): 5445–5450.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty2334>.
- [116] ANTONINI F, PERETS H B. Secular evolution of compact binaries near massive black holes: Gravitational wave sources and other exotica[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2012, 757: 27.
<http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/757/1/27>.
- [117] ZEVIN M, SAMSING J, RODRIGUEZ C, et al. Eccentric Black Hole Mergers in Dense Star Clusters: The Role of Binary–Binary Encounters[J/OL]. *Astrophys. J.*, 2019, 871(1): 91.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaf6ec>.
- [118] CARDOSO V, MACEDO C F B, VICENTE R. Eccentricity evolution of compact binaries and applications to gravitational-wave physics[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2021, 103(2): 023015.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.023015>.
- [119] RODRIGUEZ C L, AMARO-SEOANE P, CHATTERJEE S, et al. Post-Newtonian Dynamics in Dense Star Clusters: Formation, Masses, and Merger Rates of Highly-Eccentric Black Hole Binaries[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2018, 98(12): 123005.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.123005>.

- [120] LOWER M E, THRANE E, LASKY P D, et al. Measuring eccentricity in binary black hole inspirals with gravitational waves[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2018, 98(8): 083028.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.083028>.
- [121] FAYE G, MARSAT S, BLANCHET L, et al. The third and a half post-Newtonian gravitational wave quadrupole mode for quasi-circular inspiralling compact binaries[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2012, 29: 175004.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/29/17/175004>.
- [122] BLANCHET L. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries[J/OL]. *Living Rev. Rel.*, 2014, 17: 2.
<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2014-2>.
- [123] BOYLE M, OTHERS. The SXS Collaboration catalog of binary black hole simulations[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2019, 36(19): 195006.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab34e2>.
- [124] FIELD S E, GALLEY C R, HESTHAVEN J S, et al. Fast prediction and evaluation of gravitational waveforms using surrogate models[J/OL]. *Phys. Rev. X*, 2014, 4(3): 031006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.4.031006>.
- [125] VARMA V, FIELD S E, SCHEEL M A, et al. Surrogate models for precessing binary black hole simulations with unequal masses[J/OL]. *Phys. Rev. Research.*, 2019, 1: 033015.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033015>.
- [126] BUONANNO A, DAMOUR T. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 1999, 59: 084006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.59.084006>.
- [127] CAO Z, HAN W-B. Waveform model for an eccentric binary black hole based on the effective-one-body-numerical-relativity formalism[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2017, 96(4): 044028.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.044028>.
- [128] AJITH P, OTHERS. Phenomenological template family for black-hole coalescence waveforms[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2007, 24: S689–S700.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/24/19/S31>.

-
- [129]SANTAMARIA L, OTHERS. Matching post-Newtonian and numerical relativity waveforms: systematic errors and a new phenomenological model for non-precessing black hole binaries[J/OL]. Phys. Rev. D, 2010, 82 : 064016.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.82.064016>.
- [130]HUSA S, KHAN S, HANNAM M, et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal[J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 93(4) : 044006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044006>.
- [131]KHAN S, HUSA S, HANNAM M, et al. Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era[J/OL]. Phys. Rev. D, 2016, 93(4) : 044007.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.044007>.
- [132]LONDON L, KHAN S, FAUCHON-JONES E, et al. First higher-multipole model of gravitational waves from spinning and coalescing black-hole binaries[J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2018, 120(16) : 161102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.161102>.
- [133]PRATTEN G, OTHERS. Computationally efficient models for the dominant and subdominant harmonic modes of precessing binary black holes[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(10) : 104056.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.104056>.
- [134]HUERTA E A, KUMAR P, MCWILLIAMS S T, et al. Accurate and efficient waveforms for compact binaries on eccentric orbits[J/OL]. Phys. Rev. D, 2014, 90 : 084016.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.084016>.
- [135]YUNES N, ARUN K G, BERTI E, et al. Post-circular expansion of eccentric binary inspirals: Fourier-domain waveforms in the stationary phase approximation[J/OL]. Phys. Rev. D, 2009, 80 : 084001.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.084001>.
- [136]WETTE K. SWIGLAL: Python and Octave interfaces to the LALSuite gravitational-wave data analysis libraries[J/OL]. SoftwareX, 2020, 12 : 100634.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.softx.2020.100634>.

- [137]MOORE B, ROBSON T, LOUTREL N, et al. Towards a Fourier domain waveform for non-spinning binaries with arbitrary eccentricity[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2018, 35(23): 235006.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaea00>.
- [138]MOORE B, YUNES N. A 3PN Fourier Domain Waveform for Non-Spinning Binaries with Moderate Eccentricity[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2019, 36(18): 185003.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab3778>.
- [139]KLEIN A. EFPE: Efficient fully precessing eccentric gravitational waveforms for binaries with long inspirals[J]. *arXiv e-prints*, 2021: arXiv:2106.10291.
- [140]ARREDONDO J N, KLEIN A, YUNES N. Efficient gravitational-wave model for fully-precessing and moderately eccentric, compact binary inspirals[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2024, 110(4): 044044.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.044044>.
- [141]PAUL K, MAURYA A, HENRY Q, et al. ESIGMAHM: An Eccentric, Spinning inspiral-merger-ringdown waveform model with Higher Modes for the detection and characterization of binary black holes[J]. *arXiv e-prints*, 2024.
- [142]SATHYAPRAKASH B S, SCHUTZ B F. Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves[J/OL]. *Living Rev. Rel.*, 2009, 12: 2.
<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2009-2>.
- [143]TINTO M, ARMSTRONG J W. Cancellation of laser noise in an unequal-arm interferometer detector of gravitational radiation[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 1999, 59: 102003.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.59.102003>.
- [144]ESTABROOK F B, TINTO M, ARMSTRONG J W. Time delay analysis of LISA gravitational wave data: Elimination of spacecraft motion effects[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2000, 62: 042002.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.62.042002>.
- [145]MARSAT S, BAKER J G. Fourier-domain modulations and delays of gravitational-wave signals[J/OL]. *arXiv e-prints*, 2018.
<https://arxiv.org/abs/1806.10734>.
- [146]HU X-C, LI X-H, WANG Y, et al. Fundamentals of the orbit and response for TianQin[J/OL]. *Class. Quant. Grav.*, 2018, 35(9): 095008.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aab52f>.

-
- [147] CORNISH N J, RUBBO L J. The LISA response function[J/OL]. Phys. Rev. D, 2003, 67: 022001.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.67.029905>.
- [148] ROBSON T, CORNISH N J, LIU C. The construction and use of LISA sensitivity curves[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2019, 36(10): 105011.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ab1101>.
- [149] RUAN W-H, LIU C, GUO Z-K, et al. The LISA-Taiji network[J/OL]. Nature Astron., 2020, 4: 108–109.
<http://dx.doi.org/10.1038/s41550-019-1008-4>.
- [150] HUANG S-J, HU Y-M, KOROL V, et al. Science with the TianQin Observatory: Preliminary results on Galactic double white dwarf binaries[J/OL]. Phys. Rev. D, 2020, 102(6): 063021.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.063021>.
- [151] BABAK S, PETITEAU A, HEWITSON M. LISA Sensitivity and SNR Calculations[J]. arXiv e-prints, 2021.
- [152] LIU C, RUAN W-H, GUO Z-K. Confusion noise from Galactic binaries for Taiji[J/OL]. Phys. Rev. D, 2023, 107(6): 064021.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.064021>.
- [153] LIANG Z-C, LI Z-Y, LI E-K, et al. Revisiting stochastic gravitational wave background in the strong signal case[J/OL]. Results Phys., 2024, 63: 107876.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2024.107876>.
- [154] BABAK S, OTHERS. Searching for gravitational waves from binary coalescence[J/OL]. Phys. Rev. D, 2013, 87(2): 024033.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.87.024033>.
- [155] FINN L S. Detection, measurement and gravitational radiation[J/OL]. Phys. Rev. D, 1992, 46: 5236–5249.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.46.5236>.
- [156] CREIGHTON J D E, ANDERSON W G. Gravitational-wave physics and astronomy: An introduction to theory, experiment and data analysis[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- [157] CONWAY J H, SLOANE N J A. Sphere packings, lattices and groups[M/OL]. [S.l.]: Springer, 1988.
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2016-7>.

-
- [158] ALLEN B. Optimal template banks[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 104(4) : 042005.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.042005>.
 - [159] ALLEN B. Performance of random template banks[J/OL]. Phys. Rev. D, 2022, 105(10) : 102003.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.102003>.
 - [160] HARRY I W, ALLEN B, SATHYAPRAKASH B S. Stochastic template placement algorithm for gravitational wave data analysis[J/OL]. Phys. Rev. D, 2009, 80 : 104014.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.104014>.
 - [161] KACANJA K, NITZ A H, WU S, et al. Efficient Stochastic Template Bank Using Inner Product Inequalities[J/OL]. Astrophys. J., 2024, 975(2) : 212.
<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ad7d87>.
 - [162] AJITH P, FOTOPOULOS N, PRIVITERA S, et al. Effectual template bank for the detection of gravitational waves from inspiralling compact binaries with generic spins[J/OL]. Phys. Rev. D, 2014, 89(8) : 084041.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.084041>.
 - [163] BABAK S. Building a stochastic template bank for detecting massive black hole binaries[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2008, 25 : 195011.
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/25/19/195011>.
 - [164] PRIVITERA S, MOHAPATRA S R P, AJITH P, et al. Improving the sensitivity of a search for coalescing binary black holes with nonprecessing spins in gravitational wave data[J/OL]. Phys. Rev. D, 2014, 89(2) : 024003.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.024003>.
 - [165] FISHER R A. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics[J/OL]. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, 1922, 222 : 309 – 368.
<http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1922.0009>.
 - [166] CUTLER C, FLANAGAN E E. Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary’s parameters from the inspiral wave form?[J/OL]. Phys. Rev. D, 1994, 49 : 2658 – 2697.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.49.2658>.
 - [167] BERTI E, BUONANNO A, WILL C M. Estimating spinning binary parameters and testing alternative theories of gravity with LISA[J/OL]. Phys. Rev. D, 2005, 71 : 084025.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.71.084025>.

-
- [168] OWEN B J. Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries: Choice of template spacing[J/OL]. Phys. Rev. D, 1996, 53: 6749–6761.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.53.6749>.
- [169] BALASUBRAMANIAN R, SATHYAPRAKASH B S, DHURANDHAR S V. Gravitational waves from coalescing binaries: Detection strategies and Monte Carlo estimation of parameters[J/OL]. Phys. Rev. D, 1996, 53: 3033–3055.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.53.3033>.
- [170] CORNISH N J. Fast Fisher Matrices and Lazy Likelihoods[J]. arXiv e-prints, 2010.
- [171] ZACKAY B, DAI L, VENUMADHAV T. Relative Binning and Fast Likelihood Evaluation for Gravitational Wave Parameter Estimation[J]. arXiv e-prints, 2018.
- [172] LESLIE N, DAI L, PRATTEN G. Mode-by-mode relative binning: Fast likelihood estimation for gravitational waveforms with spin-orbit precession and multiple harmonics[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 104(12): 123030.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.104.123030>.
- [173] KATZ M L. Fully automated end-to-end pipeline for massive black hole binary signal extraction from LISA data[J/OL]. Phys. Rev. D, 2022, 105(4): 044055.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.105.044055>.
- [174] CHEN H-Y, LYU X-Y, LI E-K, et al. Near Real-Time Gravitational Wave Data Analysis of the Massive Black Hole Binary with TianQin[J/OL]. Sci. China Phys. Mech. Astron., 2024, 67: 279512.
<http://dx.doi.org/10.1007/s11433-023-2377-7>.
- [175] WEAIVING C R, NUTTALL L K, HARRY I W, et al. Adapting the PyCBC pipeline to find and infer the properties of gravitational waves from massive black hole binaries in LISA[J/OL]. Class. Quant. Grav., 2024, 41(2): 025006.
<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad134d>.
- [176] METROPOLIS N, ROSENBLUTH A W, ROSENBLUTH M N, et al. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines[J/OL]. The Journal of Chemical Physics, 1953, 21(6): 1087–1092.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1699114>.
- [177] HASTINGS W K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications[J/OL]. Biometrika, 1970, 57(1): 97–109.
<http://dx.doi.org/10.1093/biomet/57.1.97>.

- [178]HUKUSHIMA K, NEMOTO K. Exchange Monte Carlo Method and Application to Spin Glass Simulations[J/OL]. Journal of the Physical Society of Japan, 1996, 65(6): 1604.
<http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.65.1604>.
- [179]GOODMAN J, WEARE J. Ensemble samplers with affine invariance[J/OL]. CAMCoS, 2010, 5(1): 65–80.
<http://msp.org/camcos/2010/5-1/p04.xhtml>.
- [180]FOREMAN-MACKEY D, HOGG D W, LANG D, et al. emcee: The MCMC Hammer[J/OL]. Publ. Astron. Soc. Pac., 2013, 125: 306–312.
<http://dx.doi.org/10.1086/670067>.
- [181]SKILLING J. Nested Sampling[J/OL]. AIP Conf. Proc., 2004, 735(1): 395.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.1835238>.
- [182]SKILLING J. Nested sampling for general Bayesian computation[J/OL]. Bayesian Analysis, 2006, 1(4): 833–859.
<http://dx.doi.org/10.1214/06-BA127>.
- [183]SPEAGLE J S. dynesty: a dynamic nested sampling package for estimating Bayesian posteriors and evidences[J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2020, 493(3): 3132–3158.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa278>.
- [184]FEROZ F, HOBSON M P, BRIDGES M. MultiNest: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics[J/OL]. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 2009, 398: 1601–1614.
<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14548.x>.
- [185]WILLIAMS M J, VEITCH J, MESSENGER C. Importance nested sampling with normalising flows[J/OL]. Mach. Learn. Sci. Tech., 2023, 4(3): 035011.
<http://dx.doi.org/10.1088/2632-2153/acd5aa>.
- [186]WILLIAMS M J, VEITCH J, MESSENGER C. Nested sampling with normalizing flows for gravitational-wave inference[J/OL]. Phys. Rev. D, 2021, 103(10): 103006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.103.103006>.
- [187]ARNAUD K A, OTHERS. The Mock LISA Data Challenges: An overview[J/OL]. AIP Conf. Proc., 2006, 873(1): 619–624.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.2405108>.

-
- [188]REN Z, ZHAO T, CAO Z, et al. Taiji data challenge for exploring gravitational wave universe[J/OL]. *Front. Phys. (Beijing)*, 2023, 18(6): 64302.
<http://dx.doi.org/10.1007/s11467-023-1318-y>.
- [189]LOUTREL N. Repeated Bursts: Gravitational Waves from Highly Eccentric Binaries[J/OL]. *Handbook of Gravitational Wave Astronomy*, 2020: 1–35.
http://dx.doi.org/10.1007/978-981-15-4702-7_33-1.
- [190]CHUA A J K, KATZ M L, WARBURTON N, et al. Rapid generation of fully relativistic extreme-mass-ratio-inspiral waveform templates for LISA data analysis[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2021, 126(5): 051102.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.051102>.
- [191]KATZ M L, CHUA A J K, SPERI L, et al. FastEMRIWaveforms: New tools for millihertz gravitational-wave data analysis[J]. *arXiv e-prints*, 2021.
- [192]CORNISH N J, LITTENBERG T B. Tests of Bayesian Model Selection Techniques for Gravitational Wave Astronomy[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2007, 76: 083006.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.76.083006>.
- [193]ROBSON T, CORNISH N J, TAMANINI N, et al. Detecting hierarchical stellar systems with LISA[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2018, 98(6): 064012.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.064012>.
- [194]吕翔宇. 空间引力波探测器中恒星级双黑洞数据处理研究 [D]. 广州: 中山大学, 2023.
- [195]SEOANE P A, OTHERS. The effect of mission duration on LISA science objectives[J/OL]. *Gen. Rel. Grav.*, 2022, 54(1): 3.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10714-021-02889-x>.
- [196]ADE P A R, OTHERS. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters[J/OL]. *Astron. Astrophys.*, 2016, 594: A13.
<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201525830>.
- [197]SETO N, KYUTOKU K. How many extragalactic stellar mass binary black holes will be detected by space gravitational-wave interferometers?[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2022, 514(4): 4669–4675.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stac1561>.

- [198] LENON A K, NITZ A H, BROWN D A. Measuring the eccentricity of GW170817 and GW190425[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2020, 497(2): 1966–1971.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/staa2120>.
- [199] O’SHEA E, KUMAR P. Correlations in gravitational-wave reconstructions from eccentric binaries: A case study with GW151226 and GW170608[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2023, 108(10): 104018.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.108.104018>.
- [200] MANGIAGLI A, KLEIN A, SESANA A, et al. Post-Newtonian phase accuracy requirements for stellar black hole binaries with LISA[J/OL]. *Phys. Rev. D*, 2019, 99(6): 064056.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.064056>.
- [201] PÜRRER M, HASTER C-J. Gravitational waveform accuracy requirements for future ground-based detectors[J/OL]. *Phys. Rev. Res.*, 2020, 2(2): 023151.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.023151>.
- [202] ROMERO-SHAW I M, KREMER K, LASKY P D, et al. Gravitational waves as a probe of globular cluster formation and evolution[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2021, 506(2): 2362–2372.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stab1815>.
- [203] ROMERO-SHAW I M, GEROSA D, LOUTREL N. Eccentricity or spin precession? Distinguishing subdominant effects in gravitational-wave data[J/OL]. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 2023, 519(4): 5352–5357.
<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stad031>.
- [204] WANG L, CHEN H-Y, LYU X, et al. Dealing with data gaps for TianQin with massive black hole binary signal[J/OL]. *Eur. Phys. J. C*, 2025, 85(2): 120.
<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-13810-0>.
- [205] KULLBACK S, LEIBLER R A. On Information and Sufficiency[J/OL]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1951, 22(1): 79–86.
<http://www.jstor.org/stable/2236703>.
- [206] VITALE S, GEROSA D, HASTER C-J, et al. Impact of Bayesian Priors on the Characterization of Binary Black Hole Coalescences[J/OL]. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, 119(25): 251103.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251103>.

攻读博士学位期间发表学术论文情况

- [1] **Wang H**, Harry I, Nitz A, Hu Y-M. Space-based gravitational wave observatories will be able to use eccentricity to unveil stellar-mass binary black hole formation[J/OL]. Physical Review D, 2024, 109(6): 063029. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.063029>.
- [2] Wang H-Z, Liu S, **Wang H**, Chen H-Y, Wang L, Hu Y-M. Detection for intermediate-mass binary black holes in Population III star clusters with TianQin[J/OL]. Astronomy & Astrophysics, 2025, 697: A49. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202453615>.
- [3] 李恩坤, 陈洪昱, 李亚南, 李知圆, **王晗**, 王添晓, 叶长青, 张雪婷, 胡一鸣, 梅健伟. 空间引力波探测数据处理 [J/OL]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 230406. <https://doi.org/10.1360/SSPMA-2024-0357>.
- [4] Chen H-Y, **Wang H**, Li E-K, Hu Y-M. Signal-to-noise ratio analytic formulae of the inspiral binary black holes in TianQin[J/OL]. arXiv e-prints, 2024, arXiv:2410.19401. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.19401>. (Classical and Quantum Gravity 投稿中)
- [5] Li E-K, Liu S, Torres-Orjuela A, Chen X, Inayoshi K, Wang L, Hu Y-M, Amaro-Seoane P, Askar A, Bambi C, Capelo PR, Chen H-Y, Chua AJK, Condés-Breña E, Dai L, Das D, Derdzinski A, Fan H-M, Fujii M, Gao J, Garg M, Ge H, Giersz M, Huang S-J, Hypki A, Liang Z-C, Liu B, Liu D, Liu M, Liu Y, Mayer L, Napolitano NR, Peng P, Shao Y, Shashank S, Shen R, Tagawa H, Tanikawa A, Toscani M, Vázquez-Aceves V, Wang H-T, **Wang H**, Yi S-X, Zhang J-D, Zhang X-T, Zhu L, Zwick L, Huang S, Mei J, Wang Y, Xie Y, Zhang J, Luo J. Gravitational wave astronomy with TianQin[J/OL]. Reports on Progress in Physics, 2025. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/adc9be>.
- [6] Li E-K*, **Wang H***, Chen H-Y, Fan H, Li Y-N, Li Z-Y, Liang Z-C, Lyu X-Y, Wang T-X, Wu Z, Ye C-Q, Zhang X-T, Hu Y, Mei J. GWSpace: a multi-mission science data simulator for space-based gravitational wave detection[J/OL]. arXiv e-prints, 2023, arXiv:2309.15020. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.15020>. (共同第一作者, Classical and Quantum Gravity 投稿中)
- [7] Su W, Wang Y, Zhou C, Lu L, Zhou Z-B, Li TM, Shi T, Hu X-C, Zhou M-Y, Wang M, Yeh H-C, **Wang H**, Chen P-F. Analyses of laser propagation noises

for TianQin gravitational wave observatory based on the global magnetosphere MHD simulations[J/OL]. The Astrophysical Journal, 2021, 914(2): 139. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abfc49>.

致 谢

“桃李不言，下自成蹊。”初闻此语，便想未来一定要将其送给一位对我影响最深的老师。时至今日，即将完成博士学位，结束我二十多年的学生生涯，这个想法终于有了答案：我想把这句话送给我的博士导师胡一鸣老师，并致以最诚挚的感谢。五年来，从课题选择到论文定稿，每一次文献阅读、程序编写、代码测试与论文撰写的推进，都离不开与导师的反复讨论。我自认为不是个足够勇敢的人，但在导师的指导、支持与鼓励下，我完成了第一篇第一作者论文，参与研发了天琴首个开源数据处理软件 `GWSpace`，获得了国家公派留学机会，并在多个大型国际会议上介绍了自己的研究成果；就连突发奇想制作的科普视频，也能放心地交由导师点评，并收获很多中肯的建议。在导师这里我不仅学到了科学研究方法，也学到了如何将研究展示给不同的读者或听众，虽然我还只能算是初学者，但仍旧获益良多。写到这里，仍无法尽述导师的传道受业解惑之恩，总而言之，导师一直以来都是我在科研道路上的榜样。

I am especially grateful to Ian Harry, my supervisor and collaborator during my study abroad at the University of Portsmouth. Throughout that year, I had the opportunity to experience a different research environment and attend several international conferences under the support and guidance. I am also grateful for the patient mentorship throughout the project. Additional thanks go to collaborators Alexander Nitz and Michael Williams, whose contributions were instrumental in advancing the project. Finally, I extend my sincere gratitude to all the peers I met abroad—meeting so many outstanding colleagues greatly enriched my academic journey.

此外，特别感谢李恩坤老师，我向老师请教了很多技术上的问题，感谢老师一直以来的提点与耐心解答，以及在 `GWSpace` 项目上的诸多讨论。感谢（包括但不限于）梅健伟老师、张建东老师、刘帅、吕翔宇、黄顺佳、叶长青、孙烁、魏东东、张雪婷、杨书涛、张庆飞、陈海斌、陈洪昱、王含章等老师同学在科研、编程、学习等方面的帮助、讨论、宝贵建议与紧密合作，与大家的交流让我获益匪浅。正是各位老师同学的存在营造了课题组和谐、友爱、开放、包容的科研氛围，很荣幸能够和大家一起在此环境中共同学习，这些都是我攻读博士期间的重要动力。

2016年2月，LIGO 公布了 GW150914 这个人类首次探测到的引力波信号。彼时恰逢春节假期，高考也已进入倒计时，看到网上的新闻与科普文章，觉得这东西听起来很有趣。那时未曾想到，将来的我会投身于引力波研究。说到这里，衷心感

谢我的本科毕业设计导师王炎老师和苏威老师。当时的我对科研还是零基础，而且正值疫情最严峻的时期，我依然在老师们的指导和支持下顺利完成了答辩，感谢老师们对我的科研启蒙，使我跨入了科研的门槛。

中学时还是“中二少年”的我自以为热爱物理，但当时并未领悟这意味着什么。多年以后，虽然我不会自诩什么热爱，但在诸多磨砺以后仍未对这一领域生厌，本就是件难得的事。或者说，任何一个阶段的退缩都无法让我坚持至今——感谢生命中遇到的所有物理老师。

感谢高家鹏同学多年来（线上或线下）的陪伴与包容。研究生生涯注定不是一帆风顺的，很荣幸能有这样一个人无条件地接纳我所有的喜怒哀乐。以后的学术道路充满未知，但无论如何，希望我们未来也能继续相互学习，共同进步。

感谢本科以来遇见的所有天文爱好者，以及在各类学生工作中遇到的老师同学们。自己在学生工作中有很多不足之处，感谢大家的理解与包容。

“良田百顷，不在一亩；但有远志，不在当归。”多年来远赴他乡求学，感谢家人们的理解与支持。

感谢生命中遇到的所有人和事，共同塑造了当前世界线下当前时刻的独一无二的自己。

感谢 PyCharm 等编程软件在从编程语言学习到项目管理过程中各方面的重要助力。感谢科研过程中涉及的所有开源项目与软件，感谢那些秉承开源精神的开发者们。

感谢中山大学天琴中心提供的引力波科研平台，天琴中心在各方面的支持是我整个科研过程的重要基石。感谢广东建星建造集团有限公司捐助设立“天琴建星”优秀研究生奖学金。

最后，感谢国家设立各类研究生奖助学金，这些奖助学金得以让我这样家境并不富裕的学生没有经济压力地完成博士阶段的学习。特别是国家留学基金的存在还让我获得了公派出国交流的宝贵机会——我的整个研究生生涯都离不开国家的大力支持。

王晗

2025 年 5 月 15 日

